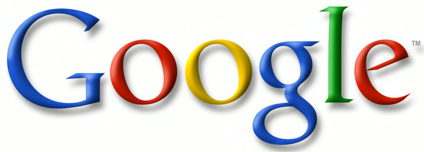



433 05772904 2

~~25 Novembre 1865.~~

July 1881

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, 26, rue Racine.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE

DES LYCÉES ET COLLÉGES

ET DE TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION PUBLIQUE,

CONFORME AUX DERNIERS PROGRAMMES OFFICIELS,

SUIVI DE NOTIONS SUR LE LEVÉ DES PLANS ET L'ARPENTAGE;

PAR A. GUILMIN,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

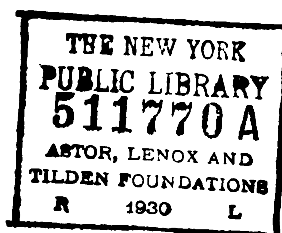


PARIS.

AUGUSTE DURAND, LIBRAIRE,

Rue des Grès, 7.

1854-1855.



ERRATA.

Page 31, ligne 2, en remontant, supprimez tous ces mots : *Autant de fois deux droits qu'il y a de côtés dans le polygone moins.*

Page 85. On ne considère que trois cas principaux de similitude des triangles ; le cas indiqué 4° est un corollaire du premier.

Page 121, ligne 7, en descendant, au lieu de *dans* AI, lisez : *dans* AE.

Page 132, ligne 2, en descendant, au lieu de ABC, DEF, lisez ABI, DEH.

Page 201, ligne 13, en remontant : au lieu de *par sa hauteur,* lisez : *par le tiers de sa hauteur.*

COURS DE GÉOMÉTRIE.

DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

1. Tout corps occupe une certaine place dans l'espace indéfini. La partie de l'espace indéfini occupée par un corps est ce qu'on nomme son *volume*.

On appelle *surface* d'un corps la limite qui sépare son volume de l'espace indéfini extérieur.

On appelle *ligne* le lieu où se rencontrent deux surfaces.

On appelle *point* l'extrémité d'une ligne, ou bien encore, le lieu où se rencontrent deux ou plusieurs lignes.

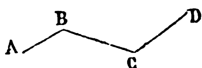
La *géométrie* a pour objet de mesurer l'étendue des lignes, des surfaces, et des volumes, et d'en étudier les propriétés, indépendamment des corps auxquels ils appartiennent.

On donne le nom de *figures* aux lignes, aux surfaces, et aux volumes ainsi considérés.

2. La *ligne droite* est une ligne indéfinie qui est la plus courte distance entre deux quelconques de ses points.



On admet comme certain : 1° qu'entre deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite; 2° que si deux lignes droites ont deux points communs, elles coïncident dans toute leur étendue.



3. Une ligne *brisée* ou *polygonale* est une ligne composée de lignes droites.

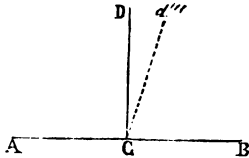
Une ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites est une ligne *courbe*.

4. On appelle *plan*, ou *surface plane*, une surface telle que, si



Théorème.

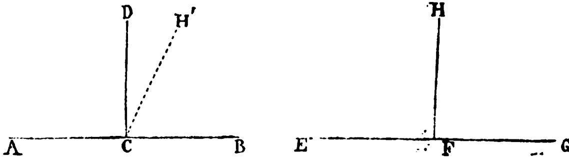
12. *En un point donné*, C, *d'une droite*, AB, *on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite.*



En effet, supposons que CD soit perpendiculaire à AB, c'est-à-dire que les angles adjacents ACD, DCB soient égaux. Si on dérange la droite CD de cette position pour l'amener dans une autre quelconque C*d'''*, par exemple, l'un des angles adjacents (celui de gauche), augmente, tandis que l'autre diminue; ces deux angles cessent donc d'être égaux, et la ligne C*d'''* n'est pas perpendiculaire à AB.

Théorème.

13. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*



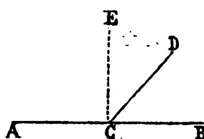
Soit, d'une part, la ligne CD perpendiculaire à AB, et de l'autre FH perpendiculaire à EG; je dis que l'angle droit HFG = DCB. Pour le démontrer, transportant la figure EFGH sur ACDB, je place la ligne EFG sur ACB, de manière que le point F soit en C; cela fait, la ligne FH coïncide d'elle-même avec CD; en effet, supposons que FH prenne une position CH', différente de CD; comme FH, devenue CH', n'a pas cessé d'être perpendiculaire à EG qui coïncide avec AB, il y aurait deux perpendiculaires CD, CH', à la ligne AB, au même point C; ce qui est impossible. Donc FH ne peut prendre une position différente de CD; FH tombe sur CD, et l'angle HFG coïncide avec DCB; ces deux angles sont donc égaux. C. Q. F. D.

14. L'angle *droit* étant une grandeur constante, bien déterminée, on l'a choisi pour terme de comparaison, pour *unité* des angles.

On nomme *aigu* tout angle plus petit qu'un angle droit; *obtus*, tout angle plus grand qu'un angle droit.

Par abréviation nous dirons quelquefois un *droit* au lieu d'un *angle droit*, comme nous disons une *droite* au lieu d'une *ligne droite*.

Nous avons déjà vu (11), que si une droite, CD, en rencontre une autre AB, elle forme avec celle-ci, du même côté, deux angles adjacents, ACD, DCB, généralement inégaux. On voit aisément sur la figure que l'un de ces angles, DCB, est *aigu*, tandis que l'autre ACD est *obtus*. De plus :



Théorème.

15. *La somme des deux angles adjacents* ACD, DCB, *formés du même côté d'une droite indéfinie,* AB, *par une autre droite,* CD, *est égale à deux droits.*

Pour le démontrer on élève au point C la perpendiculaire CE à la ligne AB. Cela fait, on remarque que l'angle

$$ACD = ACE + ECD.$$

Ajoutant de part et d'autre le même angle DCB, on a

$$ACD + DCB = ACE + ECD + DCB = 1^{\text{droit}} + ECD + DCB.$$

Mais ECD, DCB, composent ensemble le second angle droit ECB; donc ACD + DCB = 2 droits; ce qu'il fallait démontrer.

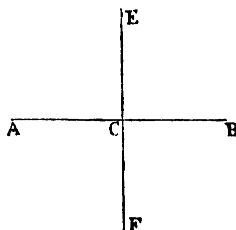
16. *Définitions.* Deux angles sont dits *supplémentaires*, ou *suppléments l'un de l'autre* quand leur somme est égale à deux angles droits. Ex. : Les angles ACD, DCB sont supplémentaires.

Deux angles sont dits *complémentaires*, ou *compléments l'un de l'autre* quand leur somme est égale à un droit.

Ex. : Les angles ECD, DCB de la figure précédente sont des angles complémentaires; DCB est le complément de ECD.

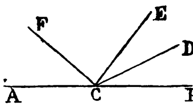
17. Corollaire I. *Si l'un des angles adjacents est droit, l'autre l'est aussi.*

18. Corollaire II. *Si une droite* EF *est perpendiculaire à une autre droite* AB, *cette seconde droite* AB *est aussi perpendiculaire à* EF.



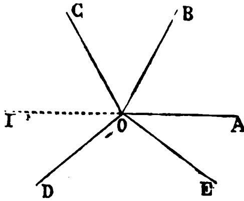
En effet EF étant perpendiculaire à AB, l'angle ACE est droit; l'angle ACE étant droit, son adjacent ACF est également droit (coroll. I); donc ACE = ACF, et AB est perpendiculaire sur EF (10).

19. Corollaire III. ***La somme des angles*** ACF, FCE, ECD, DCB, ***en nombre quelconque, formés du même coté d'une ligne*** AB, ***par plusieurs droites qui rencontrent cette ligne au même point, est égale à deux angles droits.***



En effet les angles ACF, FCE, ECD composent à eux tous l'angle ACD, et ACD + DCB = 2 droits.

20. Corollaire IV. *La somme des angles, en nombre quelconque, formés autour d'un même point est égale à quatre angles droits.*



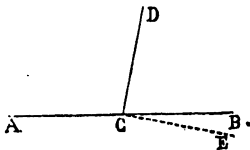
Prolongeons l'une des lignes AO dans le sens OI; l'angle COD est seulement divisé en deux parties, et la somme des angles reste la même.

Or la somme de tous les angles situés au-dessus de IOA est égale à *deux* droits; tous les angles situés au-dessous de IOA valent aussi deux droits. La somme de tous les angles réunis au point O est donc égale à quatre droits.

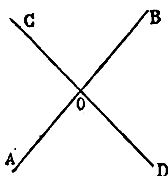
Théorème.

21. ***Si la somme de deux angles adjacents*** ACD, DCB ***est égale à deux droits, les côtés extérieurs*** (c'est-à-dire non communs) AC, CB ***sont en ligne droite.***

En effet, supposons que CB ne soit pas le prolongement en ligne droite de AC; alors AC aura pour prolongement une autre droite CE. La ligne ACE étant droite, il résulte du théorème précédent que ACD + DCE = 2 droits; mais, par hypothèse, ACD + DCB = 2 droits; donc ACD + DCE = ACD + DCB. Si de ces deux sommes égales, on retranche la même partie ACD, les restes sont égaux; on trouve ainsi DCE = DCB; c'est-à-dire que la partie DCB serait égale au tout DCE : ce qui est absurde. Mais on est conduit à cette absurdité en supposant que le prolongement de AC n'est pas CB; donc CB est le prolongement en ligne droite de AC. Ce qu'il fallait démontrer.



22. *Définition.* Deux angles sont dits *opposés par le sommet* quand les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. Tels sont les angles COB, AOD.

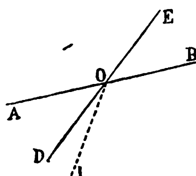


Théorème.

Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Ex.: COB = AOD. En effet, la ligne COD étant droite, on sait que COB + BOD = 2 droits; de même, la ligne BOA étant droite, AOD + BOD = 2 droits; donc COB + BOD = AOD + BOD. Si de ces deux sommes égales on retranche la même partie BOD, les restes COB, AOD sont égaux; COB = AOD; c'est ce qu'il fallait prouver. On démontrerait de même que BOD = COA.

Réciproque. Supposons que la ligne AOB étant droite, on ait d'ailleurs l'angle EOB = AOD; cela étant, OE et OD sont en ligne droite.



En effet, supposons que OD ne soit pas le prolongement en ligne droite de OE, et que ce prolongement soit OI. Alors les angles EOB, AOI étant opposés par le sommet sont égaux; EOB = AOI. Mais on a par hypothèse EOB = AOD; deux angles égaux à un même troisième sont égaux; on aurait donc AOD = AOI, c'est-à-dire la partie égale au tout, ce qui est absurde. On arrive à une absurdité en supposant que le prolongement de EO soit autre que OD; donc OD est le prolongement en ligne droite de EO; ce qu'il fallait prouver.

23. Afin d'abréger les démonstrations analogues aux précédentes, disons une fois pour toutes :

1° *Deux angles* B, C, *supplémentaires d'un même troisième* A, *sont égaux entre eux.*

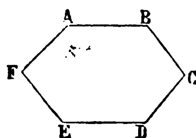
En effet, chacun des angles B et C est ce qui manque à l'angle A pour valoir deux droits; ces deux angles B et C, sont donc égaux.

2° *Deux angles* B, C, COMPLÉMENTAIRES *d'un même angle*, A, *sont égaux entre eux.*

En effet, chacun des angles B et C est ce qui manque à l'angle A pour valoir un droit; ces deux angles, B et C, sont donc égaux.

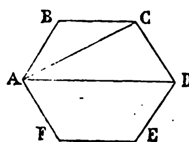
DES POLYGONES EN GÉNÉRAL ET DES TRIANGLES.

24. Un *polygone* est une figure plane terminée de toutes parts par des lignes droites.



Les lignes AB, BC, CD... sont les côtés du polygone. L'ensemble des côtés compose le contour ou *périmètre* du polygone.

Un polygone a autant d'angles que de côtés.

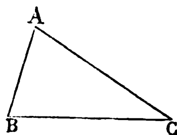


On appelle *diagonale* d'un polygone toute ligne droite qui joint deux sommets non adjacents au même côté.

Ex. : AC, AD.

DES TRIANGLES.

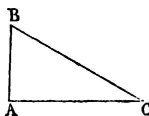
25. Le plus simple des polygones est celui qui n'a que trois côtés; il s'appelle *triangle.*



Nous nous occuperons d'abord des triangles.

On nomme triangle *équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux; triangle *isocèle* celui dont deux côtés seulement sont égaux; triangle *scalène* celui qui a ses trois côtés inégaux.

On appelle triangle *rectangle* celui qui a un angle *droit.* Le côté opposé à l'angle droit dans un triangle rectangle s'appelle *hypoténuse.*

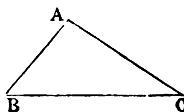


Ex. : BC.

Théorème.

26. *Dans tout triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.*

En effet, la ligne droite BC est, d'après sa définition (2), plus courte que la ligne brisée, BA + AC, qui joint les deux mêmes points; $BC < BA + AC$.

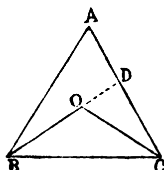


On a aussi $AC > BC - BA$; en effet, de $BC < AC + BA$, en retranchant BA des

deux parts, on déduit $BC - BA < AC$, qui est la même chose que $AC > BC - BA$.

Théorème.

27. *Si on joint un point* O *de l'intérieur d'un triangle aux extrémités de l'un des côtés* BC, *la somme* $OB + OC$ *des lignes intérieures est moindre que la somme* $AB + AC$ *des deux autres côtés.*



Pour le démontrer, je prolonge BO jusqu'à la rencontre de AC en D. Dans le triangle ODC, on a le côté OC plus petit que la somme des deux autres, $OD + DC$;

$$OC < OD + DC. \qquad (1)$$

Dans le triangle ABD, on a de même $BD < AD + AB$; ce qui revient à

$$BO + OD < AD + AB. \qquad (2)$$

Additionnant les inégalités (1) et (2), membre à membre, on trouve, en supprimant OD de part et d'autre,

$$OC + BO < DC + AD + AB,$$

ou bien

$$OC + BO < AC + AB; \text{ C. Q. F. D.}$$

ÉGALITÉ DES TRIANGLES.

28. On distingue trois cas principaux d'égalité des triangles.

Premier cas. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.*

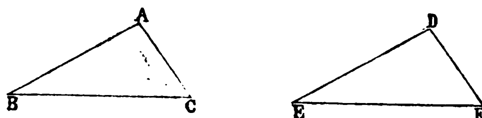
2e cas. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun.*

3e cas. *Deux triangles sont égaux quand ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.*

Nous allons démontrer ces trois propositions.

Théorème.

29. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.*



Soient les deux triangles ABC, DEF, tels que

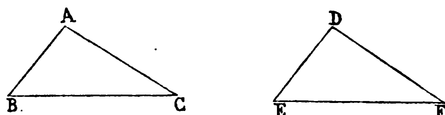
AB = DE, BC = EF, et l'angle B = l'angle E.

Ces deux triangles sont égaux.

Pour le démontrer, transportant le triangle DEF sur ABC, je place le côté EF sur son égal BC, le point E en B, et le point F en C; EF étant sur BC, puisque l'angle E = l'angle B, le côté ED prend de lui-même la direction BA à partir de B, et comme ED = BA, le point D arrive justement en A (*). Mais D étant en A, et le point F en C, le côté FD coïncide dans toute son étendue avec CA (2). Les deux triangles ABC, DEF, coïncidant dans toutes leurs parties, sont égaux.

Théorème.

30. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux.*



Soient les deux triangles ABC, DEF, tels que BC = EF, l'angle B = E, l'angle C = F; ces deux triangles sont égaux.

Pour le démontrer, transportant le triangle DEF sur ABC, je place le côté EF sur son égal BC, le point E en B, et le point F en C; le côté EF coïncidant avec BC, puisque l'angle E = l'angle B, le côté ED prend de lui-même la direction BA à partir de B, et le point D tombe quelque part sur BA ou sur son prolongement; mais l'angle F étant aussi égal à l'angle C, le côté FD prend la

---

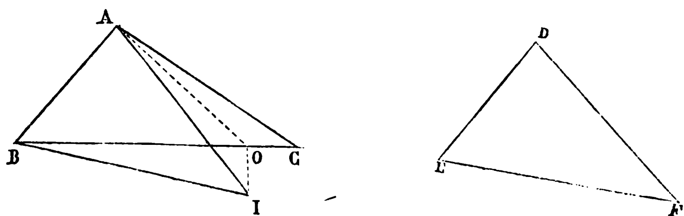
(*) Il est évident que EF étant sur BC, si ED tombait ailleurs que sur BA, à droite ou à gauche, c'est que l'angle E serait plus petit ou plus grand que l'angle A; ce qui n'est pas.

direction CA et le point D tombe quelque part sur CA. Le point D, une fois placé, doit donc se trouver à la fois sur les deux lignes BA et CA; il ne peut tomber ailleurs qu'au point A, qui est le seul point commun à ces deux lignes. Le point D étant en A, comme déjà le point E est en B, et le point F en C, le côté ED coïncide exactement avec BA et FD avec CA. Les deux triangles ABC, DEF, coïncidant dans toutes leurs parties, sont égaux.

Pour démontrer le troisième cas d'égalité des triangles, on s'appuie sur la proposition suivante :

Théorème.

31. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux chacun à chacun, à deux côtés d'un autre triangle, si en même temps l'angle compris par les premiers côtés est plus grand que l'angle compris par les seconds, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second.*



Soient les deux triangles ABC, DEF tels que

AB = DE, AC = DF, et l'angle BAC > EDF;

je dis que le côté BC est plus grand que EF.

Pour le démontrer, transportant le triangle DEF sur ABC, je place le côté DE sur son égal AB, le point D en A et le point E en B; l'angle EDF étant plus petit que BAC, le second côté DF prend dans l'intérieur de BAC la position AI, et le troisième côté EF la position BI. EF étant devenu BI, il suffira de prouver que BC est plus grand que BI; pour cela, je divise l'angle IAC en deux parties égales par la ligne AO que je termine au point O sur BC; puis je tire IO. Les deux triangles IAO, OAC ont un angle égal, IAO = OAC (par construction), compris entre deux côtés égaux,

savoir AO commun, et AI = DF = BC; ces deux triangles sont donc égaux (29); d'où on conclut que OC = OI. Cela posé, dans le triangle BOI on a BI < BO + OI; si dans cette inégalité nous remplaçons la ligne OI par son égale OC, nous avons BI < BO + OC, ou BI < BC. Mais BI = EF donc EF < BC, ou BC > EF. Ce qu'il fallait démontrer.

La réciproque du théorème précédent est vraie :

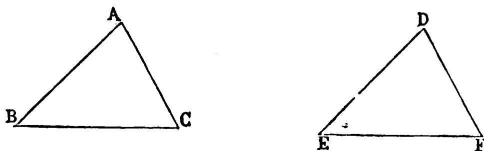
Théorème.

32. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle; si en même temps le troisième côté du premier est plus grand que le troisième côté du second, l'angle opposé à ce troisième côté dans le premier triangle est plus grand que l'angle opposé au troisième côté du second.*

Par ex. : AB = DE, AC = DF, et BC > EF (figure précédente); je dis que l'angle BAC est plus grand que l'angle D. En effet, si l'angle BAC n'était pas plus grand que D, il serait égal à D ou plus petit que lui. Si l'angle BAC était égal à D, comme déjà AB = DE et AC = DF, les triangles BAC, EDF seraient égaux (1er cas d'égalité), et on devrait avoir BC = EF, ce qui n'est pas. Si l'angle BAC était plus petit que D, à cause de AB = DE, et AC = DF, on serait dans le cas du théorème précédent, et l'on devrait avoir BC < EF, ce qui n'est pas. L'angle BAC ne pouvant être ni égal à l'angle D, ni plus petit que lui, est plus grand.

Théorème.

33. *Deux triangles qui ont les trois côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux.*



Soient les deux triangles ABC, DEF tels que AB = DE, AC = DF, BC = EF; ces deux triangles sont égaux. Cette égalité serait démontrée si on avait l'angle A = l'angle D; car on rentrerait

alors dans le premier cas d'égalité. Or l'angle A est bien égal à l'angle D; car si cela n'était pas, on aurait A > D ou A < D. Si A était plus grand que D, comme AB = DE et AC = DF, on devrait avoir, d'après le n° 31, BC > EF, ce qui n'est pas, puisque BC = EF. Si A était plus petit que D, on devrait avoir toujours, d'après le même théorème précédent, BC < EF; ce qui n'est pas. Puisque l'angle A ne peut être ni plus grand ni plus petit que l'angle D, il faut bien que ces deux angles soient égaux. D'où il résulte que nos deux triangles ABC, DEF sont égaux (1er cas).

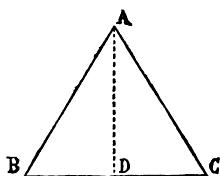
34. *Remarque.* Dans deux triangles égaux, les angles égaux A et D sont opposés à des côtés égaux BC, EF, et réciproquement.

Cette remarque s'applique à deux triangles reconnus égaux, quel que soit le cas d'égalité, puisque ces triangles coïncident dans toutes leurs parties; elle est très-importante.

Propriétés des triangles isocèles.

Théorème.

35. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*



Soit le triangle isocèle ABC, tel que AB = AC; je dis que l'angle B = l'angle C. Pour le démontrer, je joins le point A au milieu, D, de BC. Je forme ainsi deux triangles ABD, ADC qui ont les trois côtés égaux; savoir AD commun; AB = AC par hypothèse, et BD = DC, par construction; les triangles ABD, ADC sont donc égaux. On conclut de là que l'angle B de l'un, opposé à AD, est égal à l'angle C, de l'autre opposé au même côté AD; B = C; c'est ce qu'il faut démontrer.

36. Remarque. Dans un triangle *isocèle,* on donne particulièrement le nom de *base* au côté qui n'est pas égal à l'un des deux autres, et le *nom* de *sommet* du triangle au sommet de l'angle

(*) Nous verrons plus tard que dans un triangle non isocèle le nom de *base* peut être donné à l'un quelconque des côtés; mais alors le sommet du triangle est le sommet de l'angle opposé à ce côté.

opposé. Ex. : dans le triangle ABC, BC est la *base* et A le *sommet*.

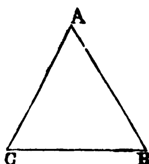
De l'égalité des triangles ABD, ADC il résulte que l'angle ADB, opposé au côté AB est égal à l'angle ADC, opposé au côté AC; la ligne AD est donc perpendiculaire sur BC. De plus l'angle BAD = DAC.

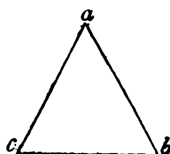
Ainsi, dans un triangle isocèle, *la ligne qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

Théorème.

37. *Si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux* ; le triangle est isocèle.

Soit le triangle ACB tel que l'angle B = l'angle C ; je dis que le





côté AC = AB. Pour le démontrer, je construis un triangle *acb* exactement égal au triangle ACB; le côté *ab* = AB, *ac* = AC,... l'angle *a* = A, *b* = B,...; cela fait, retournant ce triangle *acb*, sens dessus dessous, de droite à gauche, je le transporte sur ACB, en mettant le côté *bc* retourné sur son égal CB, le point *c* en B et le point *b* en C; le côté *ca*, partant ainsi du point B, tombera sur BA, puisque l'angle *c* = C = B; le point *a* tombera donc quelque part sur BA ou sur son prolongement. De même le côte *ba*, partant de C, tombera sur CA, puisque l'angle *b* = B = C; donc le point *a* tombera quelque part sur la ligne CA; le point *a* une fois placé sera donc à la fois sur les deux lignes BA et CA ; donc il ne peut tomber ailleurs qu'au point A, qui est le seul point commun à ces deux lignes. Le point *a* étant sur A et *c* en B, le côté *ca* coïncide exactement avec BA ; *ca* = BA; mais *ca* est égal à CA par construction ; donc CA = BA; ce qu'il fallait prouver.

Théorème.

38. *De deux côtés d'un triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé au plus grand angle, et réciproquement, de deux angles*

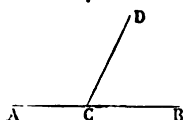
d'un triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé au plus grand côté.

1° Soit par exemple l'angle ABC plus grand que l'angle C; je dis que le côté AC est plus grand que AB. Pour le prouver, je mène la droite BD de telle sorte que l'angle DBC = l'angle C; j'ai ainsi un triangle BDC qui est isocèle d'après le théorème précédent; DC = DB; mais dans le triangle ABD, on a AB < AD + DB; ce qui, à cause de DB = DC, revient à AB < AD + DC, ou AB < AC; ce qu'il fallait démontrer.

2° Réciproquement, supposons que l'on ait *à priori* le côté AC plus grand que AB; je dis que l'angle ABC est plus grand que l'angle C. En effet, si l'angle ABC n'était pas plus grand que l'angle C, il serait égal à C ou plus petit. Si l'angle ABC était égal à C, AC serait égal à AB (n° 37), ce qui est contre l'hypothèse. Si l'angle ABC était plus petit que C, on aurait, d'après 1°, le côté AC plus petit que AB, ce qui n'est pas. L'angle ABC ne pouvant être ni égal à l'angle C, ni plus petit que lui, est plus grand.

PROPRIÉTÉS DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES MENÉES D'UN MÊME POINT A UNE MÊME DROITE.

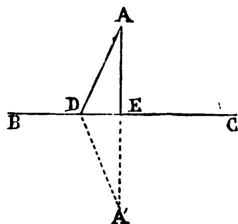
39. *Définition.* Toute droite CD qui, rencontrant une autre droite AB, ne lui est pas perpendiculaire, est dite *oblique* à cette droite AB.



Théorème.

40. *D'un point donné hors d'une droite, on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

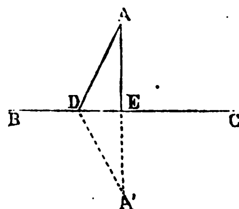
Soit le point A pris hors de la droite BC; joignons ce point A à la ligne BC par une droite quelconque AD; puis concevons que la figure BDAC tourne autour de BC jusqu'à ce qu'elle soit venue se rabattre sur le même plan, au-dessous de cette ligne. Ce mouvement effectué, le point A aura pris une certaine position A′, et la ligne DA la position DA′; joignons la nouvelle position A′ de A à l'ancienne



par la droite AEA′ qui rencontre BC en E. La figure DEA′ n'étant autre évidemment que la figure DEA qui a changé de place, l'angle AED = l'angle A′ED; la ligne BC est donc perpendiculaire à AA′ (nº 10); et réciproquement.

Théorème.

11. *D'un point* A, *donné hors d'une droite* BC, *on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur cette droite.*



En effet, supposons qu'on en puisse abaisser deux, AE, AD; puis imaginons que la figure ADE, tournant autour de BC comme charnière, vienne se rabattre au-dessous de cette ligne, sur le même plan. Le point A prend alors une certaine position A′; AE vient en EA′, et AD en DA′. Cela fait, considérons la double figure ADA′E; AE étant perpendiculaire sur BC, l'angle AED est droit; l'angle A′ED, qui n'est que la reproduction de AED, est droit comme lui; donc AED + A′ED = 2 droits, et la ligne AEA′ est droite (nº 21); de même ADE étant droit (à cause de la perpendiculaire AD), son égal A′DE est droit; ADE + A′DE = 2 droits, et la ligne ADA′ serait droite. Entre les deux points A et A′, il y aurait donc deux lignes droites; ce qui est impossible (2); il est donc également impossible d'abaisser deux perpendiculaires du même point sur la même droite.

Théorème.

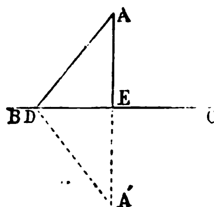
12. *Si d'un point pris hors d'une droite on abaisse sur cette droite une perpendiculaire et différentes obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus longue.*

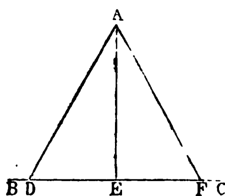
1° Soit AE perpendiculaire sur BC et AD une oblique quelconque; je dis que la perpendiculaire AE est plus courte que l'oblique AD. Pour le démontrer, je prolonge AE d'une longueur EA' = AE et je tire DA'. Les deux triangles AED, A'ED ont le côté DE commun; AE=A'E par construction, et les angles en E égaux comme droits; ces deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux; donc l'hypoténuse AD du premier égale l'hypoténuse A'D du second. Mais la ligne droite AEA' = 2AE, est plus courte que la ligne brisée ADA' = 2AD, qui joint les deux mêmes points; donc AE < AD; ce qu'il fallait prouver (*).



Remarque. La perpendiculaire AE est la plus courte ligne qui aille du point A à la droite BC.

La plus courte distance d'un point donné à une droite donnée est donc la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.

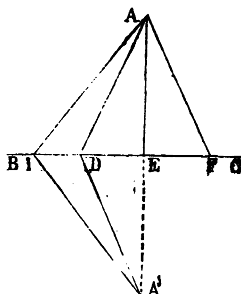
2° Soient AE perpendiculaire sur BC et les deux obliques AD, AF telles que DE = EF; ces deux obliques sont égales. En effet, les deux triangles AED, AEF ont le côté commun AE; DE = EF et les angles en E égaux comme droits; ils sont donc égaux (1er cas d'égalité). L'hypoténuse AD du premier est donc égale à l'hypoténuse AF du second; AD = AF; C. Q. F. D.



3° Soient les deux obliques AD, AI s'écartant inégalement du

(*) Cette proposition peut se démontrer exactement comme la précédente. On fait tourner AED autour de BC comme charnière, puis on dit : EA' n'est autre que EA; EA' = EA ; de même DA' = DA ; l'angle A'ED, reproduction de AED, est droit comme lui ; donc AED + A'ED = 2 droits ; donc AEA' est une ligne droite. ADE n'est pas droit ; donc son égal A'DE n'est pas droit non plus; ADA' n'est pas une ligne droite, c'est une ligne brisée. La droite AEA' = 2AE est plus petite que ADA' = 2AD ; d'où AE < AE'.

pied de la perpendiculaire AE; celle qui s'écarte le plus, AI, est la plus grande. Pour le démontrer, je prolonge AE d'une longueur EA' = AE, puis je tire les droites DA', IA'; les triangles rectangles AED, A'ED ont les angles en E égaux comme droits, ED commun, AE = A'E par construction; c'est-à-dire un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun; ces triangles sont donc égaux; d'où on conclut AD = A'D, et ADA' = 2AD. On démontrerait exactement de même que les deux triangles rectangles AIE, A'IE sont égaux; d'où on conclut AI = A'I et AIA' = 2AI (*). Mais si on considère le triangle AIA' dans lequel un point intérieur D est joint aux extrémités de l'un des côtés AA', on sait (nº 27) que la somme AD + DA' est plus petite que AI + IA'; autrement dit, 2AI > 2AD; donc AI > AD; ce qu'il fallait prouver.



Si les deux obliques inégalement distantes du pied de la perpendiculaire étaient situées de côtés différents de celle-ci, comme AI et AF, on prendrait du côté de AI une longueur ED = EF; on tirerait AD qui serait égale à AF; mais AD est plus courte que AI; donc aussi AF < AI.

43. On peut dire réciproquement :

1º *Deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire.*

Car si elles s'écartaient inégalement, celle qui s'écarterait le plus serait plus longue que l'autre.

2º *De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.*

Car si elles s'écartaient également, elles seraient égales; si la première s'écartait moins que la seconde, elle serait plus courte que celle-ci; ce qui est contre l'hypothèse.

(*) On peut encore ici démontrer en faisant tourner toute la figure supérieure autour de BC comme charnière; nous préférons même cette démonstration.

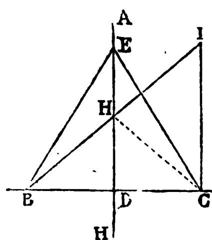
44. Remarque. ***D'un point pris hors d'une droite on ne peut mener à cette ligne plus de deux droites égales entre elles.***

En effet, supposons qu'on en puisse mener plus de deux; considérons-en trois; ou bien l'une de ces lignes est perpendiculaire et ne peut être égale aux deux autres; ou bien toutes les trois sont des obliques, et il y en a au moins deux situées du même côté de la perpendiculaire, s'écartant inégalement du pied de celle-ci, et par suite inégales.

Théorème.

45. *Si on élève une perpendiculaire au milieu d'une droite donnée : 1° tout point de la perpendiculaire est également distant des extrémités de cette droite; 2° tout point pris hors de la perpendiculaire est inégalement distant des extrémités de la droite.*

1° Soit AD perpendiculaire à la ligne BC en son milieu D; je joins le point E, pris quelconque sur AD, aux extrémités B et C de la ligne BC; EB = EC. En effet, ce sont deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire (n° 42, 1°).



2° Soit le point I situé hors de la perpendiculaire; IC est plus petit que IB. Pour le démontrer, je joins le point H où IB rencontre la perpendiculaire, au point C. D'après 1°, HC = HB; mais dans le triangle ICH, on a $IC < IH + HC$; ce qui revient à $IC < IH + HB$, ou $IC < IB$; ce qu'il fallait prouver.

46. Définition. Une ligne ou surface sur laquelle se trouvent tous les points qui jouissent d'une même propriété, qui satisfont tous à la même condition déterminée, est ce qu'on appelle le *lieu géométrique* de ces points.

On dit, par exemple :

La perpendiculaire élevée dans un plan au milieu d'une droite est le lieu géométrique des points du plan également distants des extrémités de cette droite.

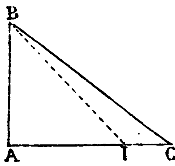
47. Égalité des triangles rectangles. Outre les cas ordinaires

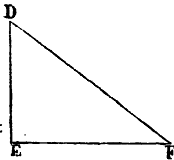
d'égalité, on distingue, pour les triangles rectangles, les deux cas suivants :

1° ***Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.***

2° ***Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.***

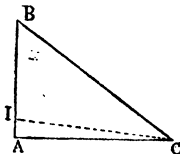
1er CAS. Soient les deux triangles rectangles ABC, DEF, tels que

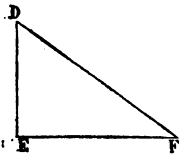




l'hypoténuse BC égale DF et le côté AB=ED; je dis que ces deux triangles sont égaux. Pour le démontrer, transportant le triangle DEF sur BAC, je place le côté ED sur son égal AB, le point E en A, et le point D en B. L'angle droit E étant égal à l'angle A, le côté EF prend alors la direction AC, et le point F tombe quelque part sur AC ou sur son prolongement. Je dis qu'il tombe justement au point C. En effet, supposons qu'il tombe ailleurs, par exemple en I; alors DF aurait la position BI; mais BI=DF devrait être égal à BC; ce qui est impossible, puisque les deux obliques BI, BC issues du même point B s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire BA; il est donc également impossible que le point F tombe ailleurs qu'en C; donc il tombe au point C; alors EF coïncide avec AC et DF avec BC; les deux triangles ABC, DEF, coïncidant dans toutes leurs parties, sont égaux.

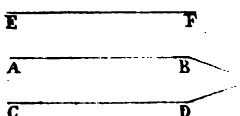
2e CAS. Soient les deux triangles ABC, DEF tels que l'hypoténuse BC = DF et l'angle B = l'angle D; je dis que ces deux triangles sont égaux.





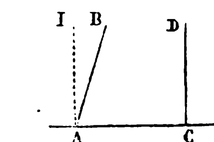
Pour le démontrer, transportant le triangle DEF sur BAC, je place l'hypoténuse DF sur son égale BC, le point D en B et le point F en C; l'angle D étant égal à l'angle B, le côté DE prend de lui-même la direction BA, et le point E tombe quelque part sur BA ou sur son prolongement. Je dis qu'il tombe justement au point A; en effet, supposons qu'il tombe ailleurs,

En effet, si ces deux droites se rencontraient en un point O, par exemple, il y aurait par ce point O deux parallèles à la même droite; ce qui est impossible.



Théorème.

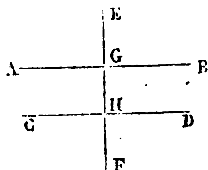
54. *Deux droites* AB, CD, *l'une oblique, l'autre perpendiculaire à la même droite* AC, *ne sont pas parallèles.*



En effet, AB étant oblique à AC, on peut élever, au point A une perpendiculaire AI sur AC; les deux lignes AI, CD étant perpendiculaires à la même droite, AC, sont parallèles; si donc AB était parallèle à CD, il passerait par le point A deux parallèles à la même droite CD; ce qui est impossible; donc AB n'est pas parallèle à CD.

Théorème.

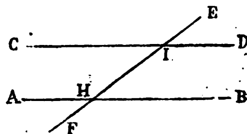
55. *Si deux lignes* AB, CD *sont parallèles, toute droite* EF, *perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*



Par exemple, EF perpendiculaire à AB est aussi perpendiculaire à CD; en effet, si EF était oblique à CD, les deux lignes CD, AB, l'une oblique, l'autre perpendiculaire à la même droite EF, ne seraient pas parallèles; ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc EF est aussi perpendiculaire à CD.

DÉFINITION.

56. Quand deux parallèles AB, CD sont rencontrées par une transversale ou sécante EF, il y a huit angles formés aux deux points d'intersection. Ces angles, considérés deux à deux, prennent des noms particuliers que nous allons faire connaître.



On appelle *alternes internes* deux angles *non adjacents*, situés entre les deux parallèles, de côtés différents de la sécante ; il y en a deux couples : 1° CIH, IHB ; 2° DIH, IHA.

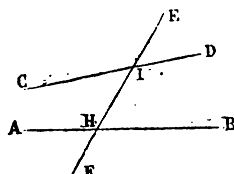
On appelle *alternes externes* deux angles non adjacents, situés en dehors des parallèles, de côtés différents de la sécante. Ex. : 1° CIE, BHF ; 2° EID, AHF.

On appelle *correspondants* deux angles non adjacents, situés du même côté de la sécante, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur des parallèles. Il y en a quatre couples : 1° EID, IHB; 2° FHB, DIH ; *idem* de l'autre côté de EF.

On appelle *internes* ou *intérieurs du même côté* deux angles situés entre les deux parallèles du même côté de la sécante : 1° DIH, IHB ; 2° CIH, IHA.

Il y a de même deux couples d'angles *externes* ou *extérieurs du même côté* : 1° EID, BHF; 2° EIC, AHF.

57. Si deux droites non parallèles AB, CD, sont rencontrées par une transversale EF, les huit angles formés aux deux points d'intersection, considérés deux à deux, peuvent être distingués de la même manière que nous venons de le faire pour deux parallèles. Dans ce qui précède, dites les droites CD, AB, au lieu des parallèles, et vous aurez des définitions générales.



Théorème.

58. *Deux droites parallèles étant coupées par une transversale quelconque :*

1° *Les angles alternes sont égaux ;*

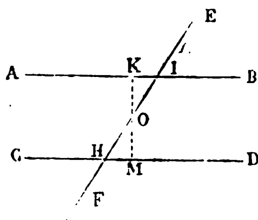
2° *Les angles correspondants sont égaux ;*

3° *Les angles alternes externes sont égaux ;*

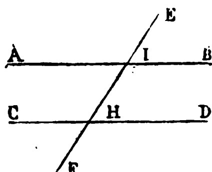
4° *Les angles intérieurs du même côté sont supplémentaires, c'est-à-dire valent ensemble deux droits ;*

5° *Les angles extérieurs du même côté sont aussi supplémentaires.*

1° *Les angles alternes internes sont égaux.* Soient, en effet, les parallèles AB, CD coupées par la transversale EF; je dis que les angles alternes internes AIH, IHD sont égaux. Pour le démontrer, par le point O, milieu de IH, je mène la ligne KOM perpendiculaire à CD, et par suite à AB. Les deux triangles rectangles OIK, OMH, ainsi formés, sont égaux; car l'hypoténuse OI=OH par construction (O milieu de IH); les angles aigus en O sont égaux comme opposés par le sommet. Les triangles OIK, OMH étant égaux (n° 47, 2° cas), le troisième angle, OIK, du premier égale le 3° angle, OHM, du second; mais l'angle OIK c'est AIH; OHM, c'est IHD; donc AIH = IHD, ce qu'il fallait prouver.



De AIH = IHD, on conclut que BIH = IHC; car BIH, IHC sont respectivement les suppléments de AIH et IHD.



2° *Les angles correspondants sont égaux.* Par exemple, EIB = IHD.

En effet, EIB = AIH (opposés par le sommet), IHD = AIH (alternes internes); les deux angles EIB, IHD égaux à un même troisième, sont égaux entre eux.

On démontrerait de même que AIE = IHC, etc....

3° *Les angles alternes externes sont égaux.* Ex. : EIB = CHF.

En effet, EIB = AIH (opposés par le sommet); CHF = IHD (opposés par le sommet); mais AIH = IHD (alternes internes); donc les angles EIB, CHF, égaux respectivement à des angles égaux, sont égaux entre eux. On prouve de même que DHF = AIE.

4° *Deux angles intérieurs du même côté valent ensemble deux angles droits.* Ex. : BIH + IHD = 2 droits.

En effet, la somme des angles adjacents BIH + AIH = 2 droits; mais AIH étant égal à IHD (alternes internes), on peut remplacer AIH par IHD, ce qui donne BIH + IHD = 2 droits.

On prouve de même que AIH + IHC = 2 droits.

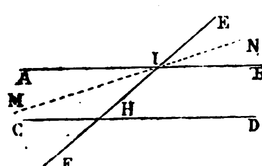
5° *Deux angles extérieurs du même côté valent ensemble deux droits.* Ex. : EIB + DHF = 2 droits.

En effet, la somme des angles adjacents EIB + BIH = 2 droits; mais BIH = DHF (angles correspondants); en remplaçant BIH par DHF, on trouve EIB + DHF = 2 droits.

On démontrerait de même que AIE + CHF = 2 droits.

Réciproques.

39. Les théorèmes réciproques des précédents sont vrais.



1° *Deux lignes* AB, CD *étant coupées par une troisième* EF, *si les angles alternes internes* AIH, IHD *sont égaux*, *les lignes* AB, CD *sont parallèles.*

En effet, si AB n'était pas parallèle à CD, on pourrait par le point I mener MN parallèle à CD; MN, CD étant parallèles, les angles alternes internes MIH, IHD sont égaux; MIH = IHD; mais on a par hypothèse AIH = IHD; on aurait donc MIH = AIH; la partie serait égale au tout, ce qui est absurde. Or on est conduit à cette absurdité en supposant que AB n'est pas parallèle à CD; donc AB est parallèle à CD.

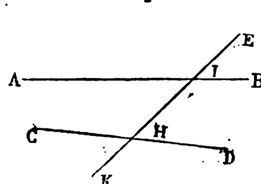
On démontre de même que *si les angles correspondants sont égaux*, par exemple, EIB = IHD, *les lignes* AB, CD *sont parallèles.*

Si la somme des angles intérieurs du même côté BIH + IHD = 2 *droits*, AB *et* CD *sont parallèles.*

S'il en était autrement, ayant fait la construction précédente, on aurait l'égalité NIH + IHD = 2 droits; en la comparant à celle-ci, BIH + IHD = 2 droits, on conclurait BIH = NIH, ou la partie égale au tout, etc.

On démontre de même les 2 réciproques que nous n'énonçons pas.

Des théorèmes précédents on en déduit d'autres, tels que celui-ci :



Deux lignes AB, CD *étant coupées par une troisième* EF, *si la somme des angles intérieurs de même côté est différente de deux droits, les deux lignes* AB, CD *ne sont pas parallèles.*

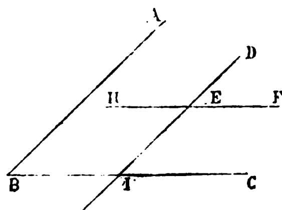
Car si ces lignes étaient parallèles, la somme des angles intérieurs du même côté serait égale à deux droits.

Il y a des théorèmes analogues relatifs aux autres couples d'angles.

Théorème.

60. *Deux angles qui ont les côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

Considérons d'abord deux angles ABC, DEF qui ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Je dis que ces deux angles sont égaux; pour le démontrer, je prolonge DE à la rencontre de BC en I; cela fait, on a l'angle ABC=DIC (angles correspondants formés par les parallèles AB, DI et la sécante BC); de plus DEF = DIC (angles correspondants formés par les parallèles BC, EF et la sécante DI) ; deux angles ABC, DEF égaux à un même troisième DIC sont égaux entre eux ; ABC=DEF; ce qu'il fallait prouver.



Considérons maintenant le cas le plus général ; nous raisonnerons ainsi : soit ABC l'un des angles, et E le sommet du second angle qui a ses côtés parallèles à AB et BC. Par le point E il ne passe qu'une parallèle à AB qui est DI; le deuxième angle a donc l'un de ses côtés dirigés suivant DI; par le même point E il ne passe qu'une parallèle à BC, c'est la ligne HF; notre second angle a donc l'un de ses côtés dirigé suivant HF; ce second angle est donc l'un des quatre angles qui ont leur sommet en E. Parmi ces quatre angles, nous avons déjà considéré DEF, qui a ses côtés dirigés dans le même sens que ceux de ABC ; DEF=ABC. Par suite HEI = DEF=ABC; DEH, supplément de DEF, est aussi supplément de ABC; de même IEF, supplément de DEF, est supplément de ABC. Notre second angle étant l'un des quatre que nous venons de considérer au sommet E, est égal à l'angle ABC ou bien est le supplément de ABC.

En résumé, et d'après notre figure :

Deux angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux. Ex. : ABC, DEF.

Si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux en sens contraires, les angles sont encore égaux. Ex. : ABC, IEH.

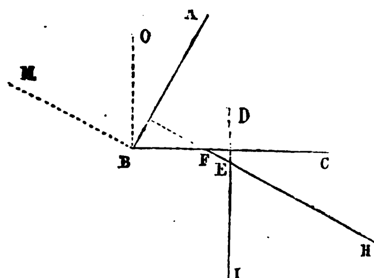
Enfin, *si les deux angles ont deux côtés dirigés dans le même sens, et deux en sens contraires, ils sont supplémentaires.* Ex. : ABC, DEH.

Théorème.

61. *Deux angles qui ont les côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.*

Je vais démontrer pour tous les cas possibles.

Soit ABC l'un des angles proposés, et E le sommet du second angle dont les côtés sont respectivement perpendiculaires à AB et BC. Par le point E il ne passe qu'une perpendiculaire à la ligne AB; soit FH cette perpendiculaire; notre second angle a nécessairement un côté dirigé suivant FH. Par le même point E il ne passe qu'une perpendiculaire à BC; soit DI cette perpendiculaire; notre second angle a son autre côté dirigé suivant DI; ce second angle est donc l'un des quatre qui ont leur sommet en E. Parmi ces quatre angles, considérons l'angle DEF de même espèce que l'angle donné ABC, c'est-à-dire aigu comme lui; je dis que DEF = ABC. Pour le démontrer, je mène par le point B une parallèle BO à ED, dirigée dans le même sens que ED; cette ligne BO est, comme sa parallèle ED, perpendiculaire à BC; par le même point B je mène BM parallèle à EF, dans le même sens que EF; BM est perpendiculaire à BA. J'ai ainsi formé un angle MBO égal à DEF (théorème précédent, 1er cas); il me suffira donc de prouver que MBO = ABC. Or, à cause de OB perpendiculaire à BC, ABC + ABO = OBC = 1 droit; à cause de MB perpendiculaire à AB, MBO + ABO = MBA = 1 droit. On conclut de ces deux égalités ABC + ABO = MBO + ABO; d'où on déduit, en retranchant ABO de part et d'autre, ABC = MBO. Mais MBO = DEF; donc ABC = DEF.



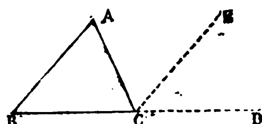
Cela posé, IEH = DEF = ABC; DEH supplément de DEF est aussi supplément de ABC; enfin IEF, supplément de DEF, est supplément de ABC. Notre second angle, qui est l'un des quatre angles au sommet E, est donc égal à ABC ou supplément de ABC.

Deux angles qui ont les côtés perpendiculaires sont égaux quand

ils sont de même espèce, c'est-à-dire tous deux aigus ou tous deux obtus ; ils sont supplémentaires quand ils sont d'espèces différentes (*).

Théorème.

62. ***La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits.***



Soit ABC un triangle donné quelconque ; je prolonge l'un des côtés BC, et par le point C je mène CE parallèle à BA. Nous avons au sommet C trois angles dont la somme ACB + ACE + ECD = 2 droits (nº 19). De ces trois angles, l'un ACB appartient au triangle ; le second ACE = l'angle BAC du triangle (angles alternes internes formés par les deux parallèles BA, CE et la sécante AC) ; le troisième ECD = l'angle ABC ; (angles correspondants formés par les parallèles BA, CE et la sécante BCD).

ACB = ACB
BAC = ACE
ABC = ECD

Additionnons ; la somme des angles du triangle

ACB + BAC + ABC = ACB + ACE + ECD = 2 droits, C. Q. F. D.

63. Remarque. L'angle ACD formé par l'un des côtés AC d'un triangle, et le prolongement CD d'un autre côté s'appelle un angle extérieur au triangle.

Chaque angle extérieur à un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents.

Ex. : ACD = A + B.

En effet, la somme A + B + C = 2 droits ; d'ailleurs ACD + l'angle C du triangle = 2 droits ; donc A + B + C = ACD + C ; donc ACD = A + B. Cela résulte d'ailleurs de la démonstration précédente.

(*) Il y a un moyen de construction pour reconnaître si les angles sont égaux ou supplémentaires.

63 *bis*. Corollaire I. Un triangle ne peut avoir *qu'un seul* angle *droit*, ou un *seul* angle *obtus*.

Autrement la somme de ses angles vaudrait plus de deux droits.

64. Corollaire II. *La somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à un droit.*

65. Corollaire III. Si deux angles A, B, d'un triangle ABC, sont égaux, chacun à chacun, à deux angles D, E d'un autre triangle, DEF, le troisième angle du premier triangle est égal au troisième angle du second.

En effet, des deux égalités $A+B+C=2$ droits, $D+E+F=2$ droits, on conclut $A+B+C=D+E+F$; d'où, à cause de $A+B=D+E$, résulte $C=F$.

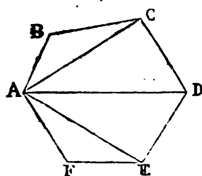
66. Quand deux triangles rectangles ont un angle aigu égal, cela leur fait deux angles égaux chacun à chacun; le second angle aigu de l'un est donc égal au second angle aigu de l'autre.

67. Connaissant deux angles d'un triangle, on obtient le troisième en retranchant de deux angles droits la somme des angles donnés.

Théorème.

68. *La somme des angles d'un polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.*

Ex. : Si le polygone a 6 côtés, $6-2=4$; la somme des angles du polygone est égale à 4 fois 2 droits, ou 8 angles droits.



Soit ABCDEF un polygone donné. Je joins le sommet A à tous les sommets du polygone; j'obtiens ainsi autant de triangles qu'il y a de côtés dans le polygone moins 2 (moins les deux qui passent en A). Il est facile, en faisant maintenant la revue des angles du polygone, de voir que ces angles se composent avec les angles des triangles; donc la somme des angles du polygone est précisément la même que celle des angles des triangles. La somme des angles de chaque triangle vaut deux droits; le nombre des triangles est égal au nombre des côtés du polygone, diminué de 2; donc la somme des angles des triangles, ou ce qui est la même chose, la somme des angles du polygone, est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux

droits multipliés par le nombre des côtés du polygone diminué de 2. C. Q. F. D.

Si n désigne le nombre des côtés du polygone, la somme des angles est égale à $2^{\text{droits}} \times (n-2) = 2n^{\text{dr.}} - 4^{\text{dr.}}$

DÉFINITIONS.

69. Après le triangle vient le polygone de quatre côtés qu'on nomme *quadrilatère*.

Le polygone de 5 côtés s'appelle *pentagone*, de 6 côtés, *hexagone;* de 8 côtés, *octogone;* de 10 côtés, *décagone;* de 12 côtés, *dodécagone;* de 15 côtés, *pentédécagone ;* les autres polygones se désignent habituellement par le nombre de leurs côtés; on dit un polygone de 7 côtés, de 13 côtés, etc.

70. La somme des angles d'un *quadrilatère* est égale à $2^{\text{dr.}} \times (4-2) = 2^{\text{dr.}} \times 2$ ou 4 droits; si ces angles sont égaux entre eux, chacun d'eux est droit.

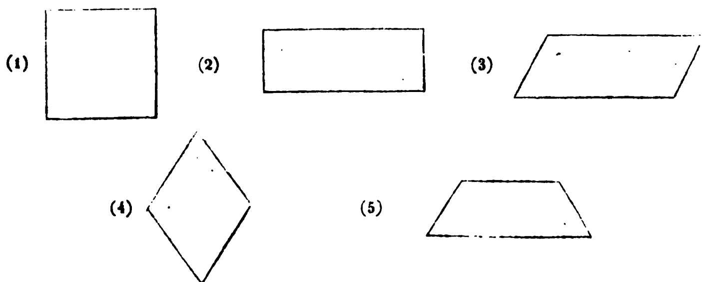
La somme des angles d'un *octogone* est $2^{\text{droits}} \times (8-2) = 6$ fois 2 droits $= 12$ droits; si ces angles sont égaux, chacun d'eux vaut $\frac{12}{8}$ ou $\frac{3}{2}$ d'angle droit, etc.

71. On appelle polygone *équilatéral* celui qui a tous ses côtés égaux; polygone *équiangle*, celui dont tous les angles sont égaux.

On appelle polygone *régulier* un polygone qui est à la fois *équiangle* et *équilatéral*, c'est-à-dire qui a ses côtés égaux et ses angles égaux.

Deux polygones sont dits *équiangles entre eux*, quand tous les angles du premier sont égaux, chacun à chacun, aux angles du second.

72. Nous allons maintenant étudier les propriétés de certains quadrilatères.



Parmi les quadrilatères on distingue :

Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits (fig. 1).

Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les côtés égaux (fig. 2).

Le *parallélogramme*, ou *rhombe* qui a les côtés opposés parallèles (fig. 3).

Le *losange*, dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits (fig. 4).

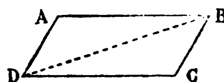
Enfin le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles (fig. 5).

PARALLÉLOGRAMMES. — PROPRIÉTÉS DE LEURS CÔTÉS, DE LEURS ANGLES ET DE LEURS DIAGONALES.

Théorème.

73. *Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux ainsi que les angles opposés.*

Menons la diagonale BD; elle décompose le parallélogramme en deux triangles ABD, BCD qui sont égaux; en effet, ces deux triangles ont le côté commun BD; l'angle ABD = l'angle BDC (*alternes internes* formés par les parallèles AB, CD et la sécante BD); l'angle ADB = l'angle DBC (*alternes internes* formés par les parallèles AD, BC); nos deux triangles ont donc un côté égal, BD, adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. Ces deux triangles étant égaux, le côté AB opposé à l'angle ADB est égal à CD opposé à l'angle égal DBC; de même AD opposé à l'angle ABD est égal à BC opposé à l'angle BDC. Enfin, l'angle A et l'angle C opposés au côté commun DB sont égaux; l'angle ADC = l'angle ABC, puisque ces deux angles sont composés de parties égales chacune à chacune.



74. Corollaire I. *Deux parallèles* AD, BC *comprises entre deux autres parallèles* AB, CD *sont égales.*

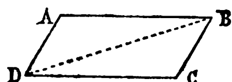
75. Corollaire II. Si AD et BC étaient perpendiculaires à CD, elles mesureraient les distances des points A et B à la ligne CD; comme la figure n'en serait pas moins un parallélogramme, on aurait AD = BC; d'où ce théorème important :

Deux parallèles sont partout également distantes.

Théorème.

76. *Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, ils sont aussi parallèles, et la figure est un parallélogramme.*

Soit AB = CD et AD = BC. Menons la diagonale BD; elle décompose le parallélogramme en deux triangles ABD, BCD qui sont égaux comme ayant les trois côtés égaux; leurs angles sont donc égaux chacun à chacun. L'angle ABD opposé au côté AD est égal à l'angle BDC opposé au côté BC; mais ces deux angles ABD, BDC ont la position d'angles *alternes internes* formés par les deux droites AB, CD et la sécante BD; donc ces lignes AB, CD sont parallèles (59). De même l'angle ADB opposé à AB égale l'angle DBC opposé à CD; mais ADB et DBC sont alternes internes; donc les lignes AD, BC sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme. C. Q. F. D.



Théorème.

77. *Si dans un quadrilatère* ABCD, *deux côtés opposés,* AB, CD, *sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

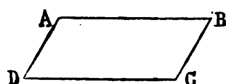
Pour le démontrer, menons la diagonale DB; elle décompose le quadrilatère en deux triangles ABD, DBC qui sont égaux comme ayant l'angle ABD = BDC (alternes internes formés par des parallèles AB, CD); le côté BD commun; et AB = DC par hypothèse. Ces triangles étant égaux, l'angle ADB opposé à AB est égal à l'angle DBC opposé à CD; or, ces angles sont *alternes internes* formés par les lignes AD, CB coupées par BD; AD et CB sont donc parallèles, et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Aux réciproques de notre premier théorème sur les parallélogrammes, on peut ajouter celle-ci :

78. *Si les angles opposés d'un quadrilatère sont égaux, la figure est un parallélogramme.*

Ex. : Si A = C; B = D; ABCD est un parallélogramme. En effet, de ces deux égalités, en additionnant, on conclut A + B = C + D; mais la somme

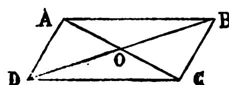
A + B + C + D = 4 droits; donc sa moitié A + B = 2 droits. Or les angles A et B ont la position d'angles iutérieurs du même côté formés par les dróites AD, BC, coupées par AB; donc ces lignes AD, BC sont parallèles. Écrivant D = B et ajoutant avec A = C, on trouve A + D = B + C; d'où A + D = 2 droits, ce qui prouve que AB et CD sont parallèles.



Théorème.

79. *Les diagonales d'un parallélogramme se divisent mutuellement en deux parties égales.*

En effet, les deux triangles AOB, COD sont égaux comme ayant un côté égal AB = CD (74), adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, savoir : OAB = OCD (alternes internes formés par les parallèles AB, CD); OBA = ODC (alternes internes formés par les mêmes parallèles). Ces deux triangles AOB, COD étant égaux, on en conclut que le côté OB, opposé à OAB, égale OD, opposé à l'angle égal OCD; puis OA opposé à OBA égale OC opposé à ODC.

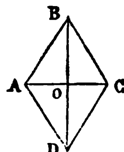


La proposition réciproque est vraie : *si les diagonales d'un quadrilatère se divisent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.*

Nous la laissons à démontrer.

Théorème.

80. *Les diagonales d'un losange se coupent en deux parties égales et à angles droits.*



D'abord elles se divisent mutuellement en deux parties égales, car un losange est un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux (76). Cela posé, les deux triangles AOB, BOC ont le côté OB commun, AB = BC, par définition; AO = OC; ces triangles sont donc égaux; par suite, l'angle AOB opposé à AB est égal à BOC opposé à BC; ces deux angles égaux sont adjacents; donc BO est perpendiculaire à AC, et réciproquement.

La proposition réciproque de la précédente est vraie : *si les dia-*

gonales d'un quadrilatère se coupent en deux parties égales et à angles droits, la figure est un losange.

Nous laissons cette réciproque à démontrer ainsi que les propositions suivantes.

Les diagonales d'un rectangle sont égales.

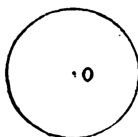
Réciproquement, *si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, la figure est un rectangle.*

LIVRE II.

DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE.

DÉFINITIONS.

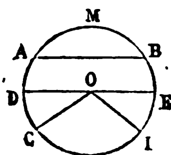
81. La *circonférence d'un cercle* est une ligne courbe plane dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre*.



Le *cercle* est la surface plane entièrement limitée par la circonférence.

Quelquefois, dans le discours, on dit *cercle* pour *circonférence;* pour ne pas faire confusion, il faut se rappeler que le cercle est une surface, tandis que la circonférence est une ligne.

On appelle *rayon* toute ligne droite qui va du centre à la circonférence. Ex. : OC, OI.



On appelle *diamètre* une ligne droite qui joint deux points de la circonférence en passant par le centre. Ex. : DE.

D'après la définition de la circonférence, tous les rayons sont égaux; tous les diamètres sont aussi égaux et doubles du rayon.

On appelle *arc* une partie déterminée de la circonférence. Ex. : l'arc AMB.

On appelle *corde* ou *sous-tendante* d'un arc, AMB, la ligne droite AB qui joint les extrémités de cet arc.

Un *segment de cercle* est une partie du cercle comprise entre un arc et sa corde. Ex. : le segment AMB.

Un *secteur* est la partie du cercle comprise entre un arc et les deux rayons qui aboutissent à ses extrémités. Ex. : le secteur COI.

On appelle en général *sécante* une ligne droite qui coupe la circonférence. Ex. : les cordes et les diamètres prolongés sont des sécantes.

82. *Une ligne droite ne saurait rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

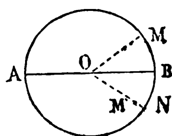
En effet, supposons qu'une droite rencontre une circonférence en plus de deux points. Soient A, B, C trois de ces points de rencontre, et O le centre de la circonférence; en tirant les rayons OA, OB, OC, on aurait trois droites égales allant du point O à la même droite, ce qui est impossible (nº 44).

83. On appelle *tangente* une ligne qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence.

Théorème.

84. *Tout diamètre,* AB, *divise la circonférence et le cercle chacun en deux parties égales.*

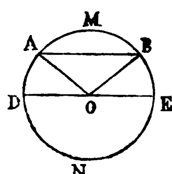
Pour le démontrer, faisons tourner la partie supérieure AMB de la figure autour de AB comme charnière, jusqu'à ce qu'elle soit rabattue sur la partie inférieure ANB. Cela fait, l'arc AMB devra coïncider exactement dans toute son étendue avec l'arc ANB; en effet, si un seul point M de AMB tombait, par exemple, à l'intérieur du cercle en M′, c'est que le rayon OM=OM′ serait plus court que le rayon ON; ce qui est contraire à la définition de la circonférence. Les deux arcs AMB, ANB coïncidant exactement, ainsi que les deux parties du cercle, le théorème est démontré.



Les diamètres sont des cordes qui passent par le centre; pour distinguer on convient d'appeler spécialement *corde* une ligne qui joint deux points de la circonférence sans passer par le centre.

85. *Toute corde,* AB, *est plus petite qu'un diamètre.*

En effet, un diamètre vaut deux rayons, et la corde AB est plus petite que la somme AO + OB des deux rayons qui aboutissent à ses extrémités.



Remarque. Chaque corde partage la circonférence en deux arcs inégaux, l'un plus petit, l'autre plus grand qu'une demi-circonférence. Ex. : AMB, ANB. La corde AB sous-tend l'un et l'autre de ces arcs; mais à moins d'une mention expresse, quand on parle de l'arc sous-tendu par une certaine corde, il s'agit toujours de l'arc plus petit qu'une demi-circonférence.

DÉPENDANCE MUTUELLE DES ARCS ET DES CORDES.

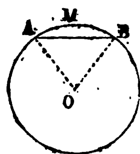
Théorème.

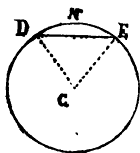
86. *Des arcs égaux appartenant à la même circonférence, ou à des circonférences égales, sont sous-tendus par des cordes égales.*

Autrement dit :

Quand deux arcs de même rayon sont égaux, leurs cordes sont égales.

Supposons que CD étant égal à OA, l'arc AMB = DNE, je dis que la corde AB égale la corde DE. Pour le démontrer, je transporte le secteur CDNE sur AOMB, mettant le rayon CD sur son égal OA, le point C en O et le point D en A; cela fait, l'arc DNE partant de A, devra coïncider dans toute son étendue avec AMB; en effet, si un seul point de DNE, N par exemple, tombait ailleurs que sur l'arc AMB, c'est que le rayon CN correspondant à ce point, N, serait plus petit ou plus grand que QA = CD; ce qui n'est pas. L'arc DNE se plaçant sur AMB à partir de A, sa deuxième extrémité E tombera au point B, puisque ces deux arcs sont égaux; les deux droites DE, AB ayant leurs extrémités communes, coïncident dans toute leur étendue et sont égales.





Théorème.

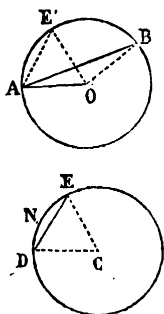
87. *Deux cordes égales tracées sur le même cercle ou sur des cercles égaux sous-tendent des arcs égaux.*

Soient (sur la même figure) en même temps que OA = CD, la corde AB = DE; je dis que l'arc AMB = l'arc DNE. En effet, d'abord les triangles AOB, COD ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux; donc l'angle DCE = AOB. Cela posé, transportant le secteur CDNE sur le secteur OAMB, je place le rayon CD sur son égal OA, le point C en O et le point D en A; puisque l'angle DCE = l'angle AOB, le rayon CE tombe alors de lui-même sur son égal OB, et le point E arrive en B; cela étant, les deux arcs CNE, AMB coïncident évidemment dans toute leur étendue; ils sont donc égaux.

Théorème.

88. *Si deux arcs pris sur la même circonférence ou sur deux circonférences égales sont inégaux, le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.*

Le rayon OA étant égal à CD, si l'arc AE'B est plus grand que DNE, la corde AB est plus grande que DE. Pour le démontrer, transportant la figure CDNE sur OAE'B, je place le rayon CD sur son égal OA, le point C en O et le point D en A; l'arc DNE s'appliquera sur AE'B à partir de A; mais comme DNE est plus petit que AE'B, le point E tombera en E', en deçà de B; de sorte que la corde DE aura la position AE'. Cela fait, si on compare les triangles AOB, AOE', on trouve le côté OA commun, OB = OE' et l'angle AOB plus grand que AOE'; donc le troisième côté AB du premier est plus grand que le troisième côté AE' du second (31); AB > AE' = DE; c'est ce qu'il fallait démontrer.



Réciproque.

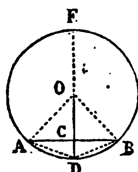
89. *Sur la même circonférence ou sur des circonférences égales, la plus grande corde sous-tend le plus grand arc.*

Soient, par exemple (figure précédente), sur les circonférences égales O et C, la corde AB plus grande que DE, je dis que l'arc AE'B est plus grand que DNE. En effet, si AE'B n'était pas plus grand que DNE, on aurait AE'B = DNE, et par suite la corde AB = CD, ce qui n'est pas, ou bien AE'B plus petit que DNE et par suite, d'après le théorème précédent, la corde AB plus petite que DE, ce qui n'est pas. L'arc AE'B ne pouvant être ni égal à DNE, ni plus petit que cet arc, est plus grand que lui. C. Q. F. D.

Théorème.

90. *Le rayon perpendiculaire à une corde divise cette corde et l'arc sous-tendu chacun en deux parties égales.*

Soit, par exemple, le rayon OD perpendiculaire à la corde AB; il divise cette corde, et l'arc sous-tendu ADB, chacun en deux parties égales. En effet, les obliques OA, OB étant égales comme rayons, doivent s'écarter également du pied de la perpendiculaire OC; donc AC = CB et le point C est le milieu de AB. Cela posé, les cordes AD, DB obliques s'écartant également du pied C de la perpendiculaire sont égales entre elles; donc l'arc AD = DB. Le théorème est donc démontré.



Le rayon OD étant prolongé vers le haut de la figure, divise évidemment l'arc AED en deux parties égales, car la corde AE égalerait la corde EB.

91. *Remarque.* Le diamètre ED perpendiculaire à la corde AB, remplit cinq conditions distinctes. Il est perpendiculaire à AB et passe par quatre points distincts et déterminés, O, C, D, E; deux quelconques de ces conditions suffisant pour déterminer une droite, c'est-à-dire, ne pouvant être remplies par deux droites différentes, dès qu'on aura reconnu qu'une droite remplit deux quelconques de ces conditions, on pourra affirmer qu'elle remplit les trois autres.

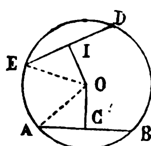
Ex. : *La droite qui joint les milieux des deux arcs sous-tendus par une corde, est un diamètre perpendiculaire au milieu de cette corde.*

Le rayon qui passe au milieu de l'arc sous-tendu par une corde, est perpendiculaire au milieu de cette corde, et son prolongement va passer au milieu du second arc sous-tendu par cette corde.

Théorème.

92. *Dans la même circonférence ou dans des circonférences égales, deux cordes égales sont également éloignées du centre; et réciproquement.*

AB = ED; je dis que OI = OC. Pour le démontrer, je mène les rayons OE, OA; j'obtiens aussi deux triangles rectangles OIE, OAC qui ont l'hypothénuse égale, OA = OE (rayons); et un côté de l'angle droit égal, AC = EI (moitiés de cordes égales); ces triangles sont donc égaux; par suite, le troisième côté OC de l'un égale le troisième côté OI de l'autre; OC = OI; C. Q. F. D.

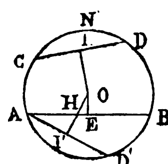


Réciproquement, si on avait, *à priori*, OC = OI, on en conclurait l'égalité des mêmes triangles rectangles AOC, OEI; d'où AC = IE; mais AC = $\frac{1}{2}$ AB; IE = $\frac{1}{2}$ ED; donc AB = ED.

Théorème.

93. *De deux cordes inégales, la plus grande est la moins éloignée du centre, et réciproquement.*

Soit la corde AB plus grande que la corde CD; alors l'arc AD'B est plus grand que l'arc CND (89); nous pouvons donc prendre sur AD'B un arc AD' = CND; tirons la corde AD', et abaissons sur AD' la perpendiculaire AI'; comme AD' = CD, la distance OI' = OI (théorème précédent). Cela posé, on voit immédiatement sur la figure que OE perpendiculaire est plus courte que OH, oblique; d'où, *à fortiori*, OE < OI', ou OE < OI; ce qu'il fallait démontrer.



Réciproquement.

De deux cordes AB, CD *qui s'écartent inégalement du centre, celle qui est la moins éloignée du centre est la plus grande;* si OE < OI, AB > CD.

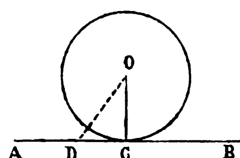
En effet, si AB n'était pas plus grand que CD, ou bien on aurait AB = CD, et par suite la distance OE = OI (92), ce qui est con-

traire à l'hypothèse; ou bien on aurait AB < CD, et par suite OE > OI (théorème précédent); ce qui est également contre l'hypothèse. La corde AB ne pouvant être ni égale à CD, ni plus petite que CD, est plus grande que CD. C. Q. F. D.

Condition pour qu'une droite soit tangente à une circonférence.

Théorème.

94. *Pour qu'une droite soit tangente à une circonférence, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.*



1° *Toute droite* AB *perpendiculaire à l'extrémité*, C, *d'un rayon* OC *est tangente à la circonférence.*

En effet, joignons le centre O à un autre point quelconque, D, de AB. La droite OD, oblique sur AB, est plus longue que le rayon OC (perpendiculaire); donc le point D est situé en dehors de la circonférence. Tout point de AB, autre que C, étant situé hors de la circonférence, la ligne AB est une tangente à cette circonférence (83).

La condition indiquée est donc suffisante.

2° *Toute tangente*, AB, *est perpendiculaire au rayon*, OC, *qui va au point de contact.*

En effet, si nous joignons le centre O à un autre point quelconque D, de AB, lequel est nécessairement extérieur au cercle, la ligne OD sera plus longue que le rayon OC; ce rayon OC étant la plus courte ligne que l'on puisse mener du centre O à la ligne AB, est la perpendiculaire unique qu'on peut mener de O sur AB (42).

Corollaire I. *Par un point donné sur une circonférence on ne peut mener qu'une tangente à cette circonférence.*

En effet, si on pouvait en mener deux, il y aurait deux perpendiculaires en ce point à la même droite (le rayon).

95. Corollaire II. *Si on abaisse du centre une perpendiculaire sur une tangente, cette ligne va d'elle-même passer au point de contact.*

En effet, si cette perpendiculaire prenait une direction OD, différente de OC (figure précédente), comme le rayon OC est lui-même perpendiculaire à la tangente, il y aurait du même point O

deux perpendiculaires à la même droite AB, ce qui est impossible.

Corollaire III. On démontre de même que *la perpendiculaire élevée sur une tangente au point de contact va passer par le centre.*

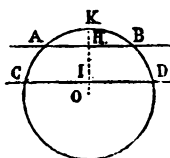
Théorème.

96. *Si deux droites parallèles rencontrent une circonférence, elles interceptent des arcs égaux.*

Il peut se présenter trois cas :

1° *Les deux parallèles* AB, CD *sont sécantes.*

J'abaisse du centre le rayon OK perpendiculaire sur CD, et par suite sur sa parallèle AB; ce rayon divise les arcs CKB, AKB, chacun en deux parties égales; de sorte que

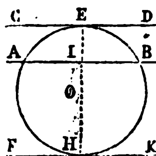


$$CK = KD$$
$$AK = KB.$$

D'où, par soustraction, CK — AK ou CA = KD — KB ou BD; CA = BD; c'est ce qu'il faut démontrer.

2° *L'une des parallèles est sécante et l'autre tangente.*

Soient AB, CD les deux parallèles proposées, je joins le centre au point de contact; le rayon OE est perpendiculaire à la tangente CD (94), et par suite à sa parallèle AB; OE étant perpendiculaire à la corde AB divise l'arc AEB en deux parties égales; donc AE = EB; ce qu'il faut démontrer.



3° *Les deux parallèles sont tangentes à la circonférence.*

Soient CD, FK ces parallèles; menons à ces deux droites une parallèle AB qui coupe la circonférence; le rayon OE perpendiculaire à AB l'est également à CD, et prolongé inférieurement, le sera à FK; cette perpendiculaire commune aux deux tangentes allant du centre à chacune d'elles, passe aux deux points de contact (95); c'est donc un diamètre qui divise la circonférence en deux parties égales EAD, EBH.

En rapportant ce cas au précédent, AB une fois menée, on au-

rait pu dire : AE=EB; AH=BH; d'où, par addition, AE+AH ou EAH=EB+BH ou EBH.

Remarque. *Deux tangentes parallèles ont leurs points de contact diamétralement opposés.*

La réciproque est évidemment vraie.

CONDITIONS DE L'INTERSECTION ET DU CONTACT DE DEUX CERCLES.

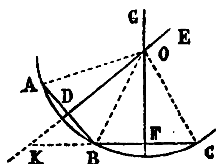
Théorème.

97. *Deux circonférences ne peuvent se rencontrer en plus de deux points.*

En effet, 1° elles ne sauraient avoir trois points communs, A, B, C, en ligne droite ; car une ligne droite ABC ne peut rencontrer chacune des circonférences en plus de deux points (n° 82) ; 2° ces circonférences ne sauraient avoir trois points communs, non en ligne droite ; car

Par trois points A, B, C *non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, mais on n'en peut faire passer qu'une.*

Pour le démontrer, ayant mené les droites AB, BC, j'élève au milieu de AB la perpendiculaire DE, et au milieu de BC la perpendiculaire FG. Ces deux perpendiculaires DE, FG se rencontrent ; car si elles étaient parallèles, la ligne CB perpendiculaire à FG, étant prolongée, serait perpendiculaire à sa parallèle DE ; comme déjà BA est par construction perpendiculaire à DE, il y aurait du même point B deux perpendiculaires BK, BD sur la même droite DE, ce qui est impossible ; donc DE et FG se rencontrent en un certain point O. Le point O, comme appartenant à DE, est également distant de A et de B ; OA=OB ; ce même point O, appartenant à FG, est également distant de B et de C ; OB=OC ; OA=OB=OC. Si donc du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence, cette circonférence passera par les trois points A, B, C. On peut donc faire passer une circonférence par les trois points A, B, C, non en ligne droite.



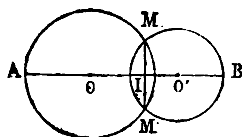
On n'en peut faire passer qu'une. En effet, le centre d'une cir-

conférence quelconque passant par les trois points A, B, C, étant également distant des points A et B, doit se trouver sur la perpendiculaire DE élevée au milieu de AB (46); ce même centre, également distant de B et de C, devra aussi se trouver sur FG; il doit donc se trouver en O, seul point commun à DE et FG; toute circonférence passant par les trois points A, B, C, a donc pour centre le point O et le rayon OA = OB = OC; elle n'est donc autre que la circonférence que nous avons déjà décrite et indiquée.

Théorème.

98. *Quand deux circonférences se coupent, la droite qui joint leurs centres* (LA LIGNE DES CENTRES) *est perpendiculaire à la corde commune et la divise en deux parties égales.*

Pour le prouver, je fais tourner la partie supérieure de la figure autour de la ligne AB comme charnière, jusqu'à ce qu'elle soit rabattue sur la partie inférieure; cela fait, chaque demi-circonférence supérieure coïncide avec son égale inférieure (84). Mais le point M commun aux deux demi-circonférences mobiles doit tomber à la fois sur les deux demi-circonférences inférieures; il tombe donc sur leur point d'intersection M'; or le point I n'a pas bougé. Donc IM coïncide avec IM'; IM = IM'; de plus l'angle OIM coïncide avec OIM'; OIM = OIM'; mais ces angle sont adjacents, donc ils sont droits. La ligne OO' est donc perpendiculaire à MM' et la divise en deux parties égales.



On démontre exactement de même le théorème suivant :

Théorème.

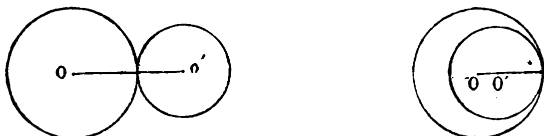
99. *Si deux circonférences ont un point commun, M, d'un côté de la ligne des centres, OO', elles ont un autre point commun de l'autre côté de cette ligne, symétriquement placé.*

DÉFINITION. *Deux points symétriques par rapport à une droite sont deux points situés sur une même perpendiculaire à cette droite, à égale distance de cette ligne.*

Ex. : Les points M, M' de la figure précédente sont symétriques

par rapport à OO'. Soient les deux circonférences O, O' (figure précédente), que nous supposerons seulement avoir le point commun M au-dessus de la ligne des centres. Achevons les circonférences, puis faisons tourner la partie supérieure de la figure autour de OO' comme charnière; chaque demi-circonférence supérieure coïncidant avec son égale inférieure, il en résulte que la figure inférieure est exactement la même que la figure supérieure; les deux demi-circonférences inférieures ont donc aussi un point commun M' sur lequel vient tomber le point M; si on tire MM' qui rencontre OO' en I, on voit que IM couvre IM'; IM = IM'; et l'angle OIM = OIM'; ces deux angles sont droits et les deux points M et M' sont symétriquement placés par rapport à OO'.

100. Définition. Deux circonférences *tangentes* ou qui *se touchent*, sont deux circonférences qui n'ont qu'un point de commun. Le point commun s'appelle point de *contact*.



Deux circonférences peuvent être tangentes *extérieurement* ou *intérieurement*, comme le montre notre figure.

Théorème.

101. *Quand deux circonférences se touchent extérieurement ou intérieurement, le point de contact est sur la ligne des centres.*

En effet, si le point commun aux deux circonférences était situé en dehors de la ligne des centres, il y aurait de l'autre côté de cette ligne, par rapport à ce point, un deuxième point commun (99); les circonférences ne seraient donc pas tangentes, mais se couperaient. La réciproque est vraie :

Si deux circonférences ont un point commun sur la ligne des centres, elles sont tangentes.

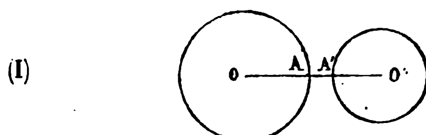
Nous la laissons à démontrer.

102. *Positions diverses de deux circonférences sur un même plan; relations entre la distance des centres et la somme ou la différence des rayons.*

Nous désignerons les distances des centres par D, le plus grand rayon par R et le plus petit par R′.

Deux circonférences tracées sur un même plan peuvent avoir l'une par rapport à l'autre *cinq* positions différentes que nous allons indiquer (*).

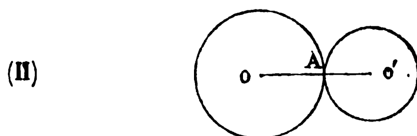
1° Les circonférences peuvent être *extérieures* l'une à l'autre.



Dans cette position évidemment, $OO' > OA + O'A'$, c'est-à-dire :

$$D > R + R'. \qquad (1)$$

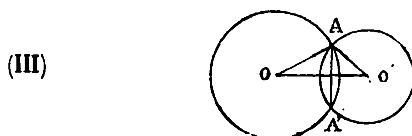
2° Les circonférences peuvent se *toucher extérieurement.*



Le point de contact étant sur la ligne des centres (101), on a évidemment $OO' = OA + O'A$, ou

$$D = R + R'. \qquad (2)$$

3° Les deux circonférences se *coupent*



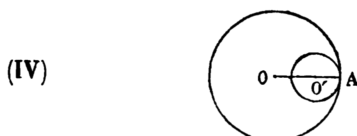
Les points d'intersection étant ainsi placés (98), on a évidemment $OO' < OA + O'A$, et $OO' > OA - O'A$, c'est-à-dire, à la fois

$$\left.\begin{array}{l} D < R + R' \\ \text{et} \quad D > R - R' \end{array}\right\} \qquad (3)$$

(*) Pour retrouver facilement ces cinq positions, on suppose, à partir de la première position, que l'une des circonférences restant fixe, la plus grande par exemple, l'autre s'avance vers celle-là ; la plus petite circonférence, après avoir

4° Les deux circonférences se *touchent intérieurement.*

(IV)

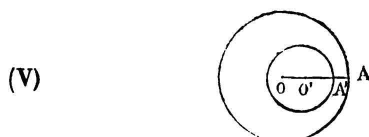


Le point de contact étant encore sur la ligne des centres (101), on a évidemment $OO' = OA - O'A$, ou

$$D = R - R'. \qquad (4)$$

5° Enfin les deux circonférences peuvent être absolument *intérieures* l'un à l'autre, *sans se toucher.*

(V)



On voit sur la figure que $OA = OO' + O'A' + A'A$; d'où on déduit $OA - O'A' = OO' + A'A$; donc $OA - O'A' > OO'$, $R - R' > D$, ou bien

$$D < R - R'. \qquad (5)$$

Les égalités ou inégalités (1), (2), (3), (4), (5), constituent autant de théorèmes faciles à énoncer.

Les réciproques de ces théorèmes sont vraies.

Si la distance des centres de deux circonférences est plus grande que la somme des rayons, $D > R + R'$, *ces deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre.*

En effet, dans toute autre position, comme on peut le voir, on n'aurait pas $D > R + R'$.

Si la distance des centres de deux circonférences est égale à la

été extérieure (I), viendra toucher extérieurement (II); puis s'avançant encore, coupera (III), puis touchera intérieurement (IV), puis enfin deviendra tout à fait intérieure (V). Si le mouvement de la petite circonférence continuait, elle reprendrait les mêmes positions relatives, mais en ordre inverse. Ces positions sont donc les seules possibles.

somme des rayons, $D = R + R'$, *ces deux circonférences se touchent extérieurement.*

En effet, dans toute autre position, on n'a pas $D = R + R'$.

Et ainsi des autres réciproques.

En vue des applications, les diverses propositions qui précèdent se résument dans les énoncés suivants :

103. *Conditions du contact et de l'intersection de deux circonférences de cercles :*

Pour que deux circonférences se touchent extérieurement, il faut et il suffit que la distance des centres soit égale à la somme des rayons.

Pour que deux circonférences se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit à la fois plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.

Pour que deux circonférences se touchent intérieurement, il faut et il suffit que la distance des centres soit précisément égale à la différence des rayons.

De même pour les positions (1) et (5).

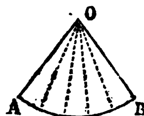
MESURE DES ANGLES.

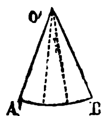
Théorème.

104. *Si des sommets de deux angles pour centres on décrit deux arcs de même rayon, le rapport des deux angles est le même que celui des arcs compris entre leurs côtés.*

On démontre d'abord aisément par la superposition (*V.* nº 87), que si les arcs sont égaux, les angles sont égaux, et réciproquement.

Supposons ensuite que les deux arcs donnés aient une commune mesure contenue cinq fois dans l'arc AB et trois fois dans A'B'.





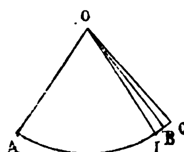
Le rapport des deux arcs est, d'après cela, égal à $\frac{5}{3}$ (*V.* l'Arith.). Joignons chacun des sommets O et O' aux points de division des arcs

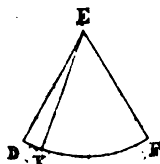
opposés ; nous formons ainsi huit angles égaux entre eux, puisqu'ils interceptent des arcs égaux ; il y a cinq de ces angles dans AOB et trois dans A'O'B' ; le rapport de ces deux angles est donc $\frac{5}{3}$, le même que celui des arcs :

$$\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{AB}{A'B'}. \quad \text{C. Q. F. D.} \quad (*)$$

(*) Ce raisonnement démontre la proposition pour tous les cas où il existe entre les arcs une commune mesure, si petite qu'elle soit ; nous concluons de là que cette proposition est vraie en général.

Quand les arcs AB, DF n'ont pas de commune mesure, on peut démontrer que les rapports $\frac{AB}{DF}$, $\frac{AOB}{DEF}$ évalués avec la même approximation quelconque sont toujours égaux (V. l'Arith., n° 309).





Évaluons, par exemple, ces rapports à moins de 0,001. Soit DK la millième partie de DF ; portons cet arc DK sur AB à partir de A, autant de fois que possible ; supposons qu'il y soit contenu 1246 fois avec un reste IB moindre que DK, de telle sorte qu'en portant DK une fois de plus, on arrive en C au delà de B. Il résulte de là que AB contient les $\frac{1246}{1000}$ de DF, pas 0,001 de plus. On dit que $\frac{AB}{DF} = \frac{1246}{1000}$, à moins de 0,001.

Menons maintenant les lignes EK, OI, OC ; l'angle DEK est la millième partie de DEF ; AI valant 1246 DK, l'angle AOI = 1246 DEK = $\frac{1246}{1000}$ de DEF (d'après 1°) ; l'angle AOB contient $\frac{1246}{1000}$ de DEF, pas 0,001 de plus ; on dit que $\frac{AOB}{DEF} = \frac{1246}{1000}$ à moins de 0,001.

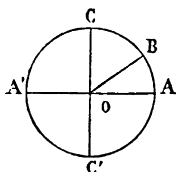
Les valeurs approchées à moins de 0,001 des rapports $\frac{AB}{DF}$, $\frac{AOB}{DEF}$ sont donc égales. Il en est de même évidemment de leurs valeurs approchées à moins de 0,0001, de 0,0001, etc. ; ces rapports sont donc égaux (Arithm., n° 309).

On peut encore conclure de cette manière :

Les deux rapports $\frac{AB}{DF}$, $\frac{AOB}{DEF}$ contiennent le même nombre de millièmes, de dix-millièmes, de cent-millièmes, etc. ; ces rapports ne sauraient donc différer ni de 0,001, ni de 0,0001,...., ni en général d'une unité décimale, si petite qu'elle soit ; ils sont donc égaux.

105. Mesure des angles. En se fondant sur la proposition précédente, on ramène la mesure ou l'évaluation d'un angle à celle d'un arc de cercle qui est beaucoup plus facile.

Mesurer un angle, c'est trouver son rapport à l'unité des angles qui est l'angle *droit*. Un angle droit, AOC, qui a son sommet au centre d'une circonférence, intercepte le quart de cette circonférence; le quart de circonférence, sous le nom de *quadrant*, a été pris pour unité des arcs de cercle.



Cela posé, en vertu de la proposition précédente, AOB étant un angle quelconque, on a :

$$\frac{AOB}{AOC} = \frac{AB}{AC},$$

ou bien

$$\frac{AOB}{1 \text{ droit}} = \frac{AB}{1 \text{ quadr.}}$$

Le nombre qui exprime la mesure de AOB, c'est-à-dire son rapport à l'angle droit, est égal au nombre qui exprime la mesure de l'arc AB, c'est-à-dire le rapport de cet arc au quadrant, unité des arcs.

Pour mesurer un angle quelconque AOB, *il suffit donc de décrire un arc de cercle, ayant le sommet de cet angle pour centre et compris entre ses côtés, puis de comparer cet arc au quart de la circonférence de même rayon. On obtient ainsi un nombre qui exprime la mesure de l'arc; le même nombre exprime la mesure de l'angle proposé rapporté à l'angle droit.*

Par exemple, si on a trouvé que l'arc est les $\frac{3}{5}$ d'un quadrant, on conclut que l'angle est les $\frac{3}{5}$ d'un angle droit.

106. Pour faciliter l'évaluation des arcs de cercle, et par suite celle des angles, on a divisé la circonférence en 360 parties égales, nommées *degrés;* le degré se subdivise en 60 minutes, la minute en 60 secondes. Les degrés, minutes, secondes, s'indiquent ainsi : $24^\circ\ 53'\ 47''$; 24 degrés 53 minutes 47 secondes.

D'après cela, un *quadrant* est un arc de 90°.

Un nombre de degrés, minutes, secondes, désigne aussi bien un angle qu'un arc de cercle. On dit un angle de 90° pour un angle droit, un angle de 19° comme on dit un arc de 19°; chacun com-

prend immédiatement qu'un angle de 19° est égal au $\frac{19}{90}$ de l'angle droit.

107. La désignation de la mesure de l'arc faisant ainsi connaître immédiatement, et sans qu'aucune explication soit nécessaire, la mesure de l'angle, on dit par abréviation :

Un angle a pour mesure tel arc désigné. Par exemple :

L'angle au centre d'une circonférence a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.

On dit même et on écrit qu'un angle est égal à un arc.

De l'une et de l'autre manière, on exprime simplement l'égalité des nombres qui représentent l'angle et l'arc rapportés à leurs unités respectives.

108. Angles inscrits. On peut faire servir à la mesure d'un angle d'autres arcs que ceux qui ont pour centre le sommet de cet angle. Les théorèmes que nous allons exposer à ce sujet sont surtout utiles pour la comparaison des angles d'une même figure.

Un angle est dit *inscrit* dans un cercle quand il a son sommet sur la circonférence et que ses côtés sont des cordes.

Un polygone est dit *inscrit* à un cercle quand tous ses sommets sont sur la circonférence.

Une figure rectiligne est dite *circonscrite* à un cercle quand tous ses côtés sont tangents à la circonférence.

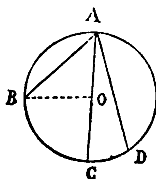
Théorème.

109. *Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Il peut se présenter trois cas.

1° Un des côtés passe par le centre. Ex. : l'angle BAC.

Tirons BO ; l'angle BOC extérieur au triangle BAO est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents A et B (n° 63); mais BO étant égal à AO, l'angle $A = B$; donc l'angle $BOC = B + A = 2A$, et réciproquement l'angle A est la moitié de l'angle BOC. Mais BOC, angle au centre, a pour mesure la moitié de l'arc BC intercepté entre ses côtés; donc l'angle A a pour mesure la moitié de BC.

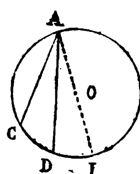


Par exemple, si BC est un arc de 64°, l'angle BAC est un angle de 32°.

2° Le centre est dans l'intérieur de l'angle. Ex. : l'angle BAD.

Cet angle BAD est la somme des angles BAC, CAD qui sont dans le premier cas; mais BAC a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC ; CAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ CD; donc l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BD$; c'est-à-dire la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

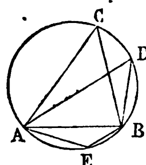
3° Le centre est en dehors de l'angle. Ex. : l'angle CAD.



Menons le diamètre AI; nous remarquons alors que l'angle proposé CAD est la différence entre les angles CAI, DAI qui sont dans le premier cas. CAI a pour mesure $\frac{1}{2}$ CI; DAI a pour mesure $\frac{1}{2}$ DI; donc CAD = CAI — DAI a pour mesure $\frac{1}{2}CI - \frac{1}{2}DI = \frac{1}{2}CD$.

Notre théorème est donc vrai en général.

110. *Remarques et corollaires.* Si on joint un point de l'arc qui limite un segment de cercle aux extrémités de la corde de ce segment, on obtient ce qu'on appelle un *angle inscrit dans ce segment.* Ex. : ACB.



Tous les angles inscrits dans un même segment de cercle sont égaux entre eux. Ex. : ACB, ADB. En effet, tousces angles ont pour mesure la moitié du même arc AEB.

Tous les angles inscrits dans un demi-cercle sont des angles droits. En effet, ils ont pour mesure la moitié d'une demi-circonférence ou un quadrant.

Tous les angles inscrits dans un segment plus grand qu'un demi-cercle sont aigus. Ex. : ACB, ADB.

En effet, l'arc AEB étant moindre qu'une demi-circonférence,

$\frac{1}{2}$ AEB, mesure de nos angles, est moindre qu'un quadrant.

Tous les angles inscrits dans un segment plus petit qu'un demi-cercle sont obtus. Ex. : AEB.

En effet, l'angle ACB qu'ils interceptent est plus grand qu'une demi-circonférence; $\frac{1}{2}$ ACB, mesure de AEB, est plus grand qu'un quart de la circonférence.

Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle valent ensemble deux droits, sont supplémentaires. Ex. : dans le quadrilatère inscrit ACBE, on a $C + E = 2$ droits.

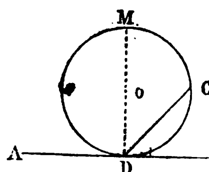
En effet, la mesure de C est $\frac{1}{2}$ AEB; celle de E est $\frac{1}{2}$ ACB; la somme $C + E$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ (AEB + ACB), c'est-à-dire une demi-circonférence qui est la mesure de deux droits.

La réciproque de cette proposition est vraie.

Théorème.

111. *L'angle formé par une corde et une tangente a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* Ex. : l'angle CDB $= \frac{1}{2}$ CD.

Pour le démontrer, tirons le diamètre DM; il est perpendiculaire à la tangente AB. On a CDB $=$ MDB $-$ MDC; or l'angle droit MDB a pour mesure un quadrant qui est la même chose que la moitié de la demi-circonférence MCD; MDB $= \frac{1}{2}$ MCD; l'angle inscrit MDC a pour mesure $\frac{1}{2}$ MC; donc l'angle CDB $=$ MDB $-$ MDC a pour mesure $\frac{1}{2}$ MCD $- \frac{1}{2}$ MC ou $\frac{1}{2}$ DC.

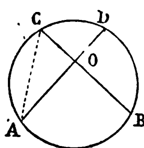


On prouverait de même que l'angle ADC a pour mesure $\frac{1}{2}$ DMC.

Théorème.

112. *Un angle qui a son sommet dans l'intérieur d'un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre leurs prolongements.*

Soit, par exemple, l'angle AOB. Tirons CA; l'angle AOB extérieur au triangle AOC est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents, A et C, qui sont inscrits dans le cercle. L'angle C a pour mesure $\frac{1}{2}$AB; l'angle A a pour mesure $\frac{1}{2}$CD; donc

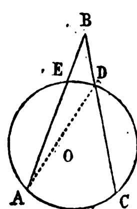


AOB $=$ C $+$ A a pour mesure $\frac{1}{2}$AB $+$ $\frac{1}{2}$CD.

Théorème.

113. *Un angle qui a son sommet hors du cercle a pour mesure la moitié de la différence des arcs compris entre ses côtés.*

Ex. : l'angle ABC a pour mesure $\frac{1}{2}$AC — $\frac{1}{2}$DE. En effet, ayant tiré AD, nous voyons que l'angle ADC $=$ ABD $+$ BAD, d'où on déduit ABD $=$ ADC — BAD. Mais l'angle inscrit ADC a pour mesure $\frac{1}{2}$AC; l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$DE; donc B $=$ ADC — BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$AC — $\frac{1}{2}$DE.



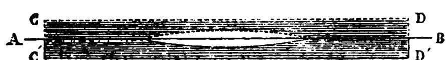
Problèmes.

114. Appliquant ce qui précède, nous allons nous occuper de la construction régulière des figures géométriques les plus simples et des opérations graphiques les plus élémentaires que l'on peut

avoir à exécuter sur ces figures ; tel est l'objet des problèmes que nous allons résoudre.

Pour les constructions ou opérations géométriques qui ont lieu sur une étendue restreinte, par exemple celles qui se font sur le papier (*), on fait principalement usage de quatre instruments, qui sont le *compas ordinaire*, la *règle*, le *rapporteur* et l'*équerre*. Tout le monde connaît le compas ordinaire et la manière de s'en servir.

Il en est de même de la règle; cependant nous en dirons ici quelques mots. La *règle* sert à tracer des lignes droites sur le papier;



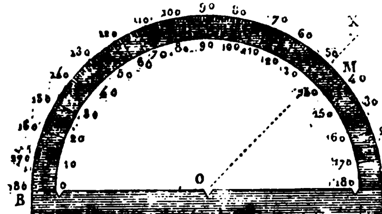
pour cela, on place cet instrument de manière que l'un de ses bords passe par les deux points A et B que l'on veut unir par une ligne droite ; puis on fait glisser contre ce bord, de A vers B, une pointe à tracer *très-déliée* (*crayon*, *plume* ou *tire-ligne*), qui appuie sur le papier ; celui-ci doit être bien tendu, et la pointe doit suivre fidèlement le bord de la règle.

Pour vérifier l'exactitude d'une règle, on s'en sert d'abord pour tirer une ligne entre deux points A, B, comme il vient d'être expliqué ; puis on fait tourner la règle autour de la ligne AB comme charnière, jusqu'à ce que son même bord passant toujours par les points A, B, elle soit venue s'appliquer sur l'autre côté du plan. Si la règle est exacte, la ligne AB doit suivre encore bien exactement le bord de la règle. Si la règle est défectueuse, cette coïncidence n'a pas lieu; chaque défaut étant reproduit en sens contraire, devient plus apparent en se doublant (V. la figure).

En admettant que la pointe à tracer suive bien exactement le bord de la règle, on peut, une fois celle-ci retournée, faire mouvoir de nouveau cette pointe, le long de la règle, de A vers B ; elle devra repasser sur le même trait ; si celui-ci se double par endroits, l'instrument est défectueux.

Rapporteur. Le rapporteur est un instrument destiné à mesurer les arcs et les angles ; c'est un demi-cercle divisé, ordinairement en cuivre et évidé, ou bien plein et en corne.

(*) Ce sont les seules dont nous nous occuperons présentement ; plus tard nous parlerons des applications faites sur le terrain ou dans les arts.



La demi-circonférence est partagée en degrés et quelquefois en demi-degrés; ces divisions sont numérotées dans les deux sens de 10° en 10°, de 0 à 180°, de droite à gauche et de gauche à droite.

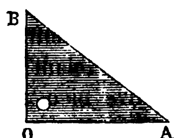
Le rapporteur sert à mesurer les arcs et les angles; il sert aussi à construire un arc ou un angle de grandeur donnée.

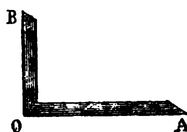
Pour mesurer un angle, YOX, avec le ***rapporteur***, on fait coïncider le diamètre de l'instrument avec l'un des côtés, OY, de l'angle, le centre coïncidant avec le sommet; le second côté de l'angle vient rencontrer la demi-circonférence, soit sur une division, soit entre deux divisions. On lit alors facilement sur l'instrument, à moins d'un degré ou d'un demi-degré, la mesure de l'angle, qui est celle de l'arc intercepté.

Pour mesurer un arc avec un rapporteur, on joint son centre à ses deux extrémités; puis on mesure l'angle ainsi formé comme il vient d'être expliqué.

Nous verrons plus loin comment on construit avec le rapporteur un angle ou un arc donné.

Équerre. Cet instrument sert à mener des perpendiculaires, et

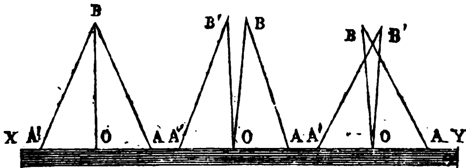




le plus souvent à mener des parallèles. Il y en a en bois ayant la forme d'un triangle rectangle sur lequel est pratiqué un trou qui sert à manier l'instrument. Il y a des équerres en fer ayant la forme d'un angle droit dont chaque côté ressemble à une règle.

Pour vérifier une équerre, il est bon de s'assurer d'abord si les bords en sont bien dressés, en essayant chaque côté comme on essaye une règle. Puis, faisant coïncider l'un des côtés de l'angle

droit avec une règle bien dressée, ou bien avec une droite XY



bien construite, on tire une seconde ligne, OB, le long du second côté de l'angle droit. Cela fait, retournant l'équerre, on fait de nouveau coïncider le premier côté OA avec le prolongement de XY à partir du point O; la ligne déjà tracée OB *doit* encore coïncider avec le second côté de l'équerre. Si elle en paraît séparée, l'angle AOB de l'instrument est aigu; si celui-ci recouvre OB, cet angle est obtus.

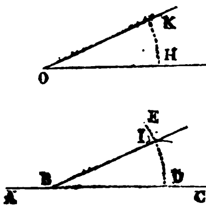
On peut d'ailleurs faire glisser la pointe à tracer le long du second côté de l'équerre retournée; si le trait repasse sur la première ligne OB, l'équerre est bonne; si la pointe trace une nouvelle ligne en dehors ou en dedans de l'angle AOB déjà construit, l'angle de l'équerre est *aigu* ou *obtus*.

Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles.

Problème.

115. *En un point donné* C *d'une ligne donnée* AB, *construire un angle égal à un angle donné.*

Du point O comme centre avec une ouverture de compas quelconque, je décris un arc de cercle KH, compris entre les côtés de l'angle O; puis du point B comme centre avec la même ouverture de compas, un arc indéfini DE, au-dessus de AC; enfin du point D comme centre avec un rayon égal à la corde de l'arc HK, je trace un arc de cercle qui coupe l'arc DE en I; je mène la droite BI. L'angle IBC ainsi construit est l'angle demandé; cet angle IBC = KOH, puisque l'arc ID = KH.



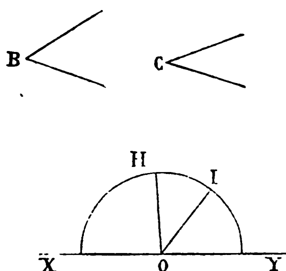
On peut résoudre le même problème avec le *rapporteur*.

Pour cela on mesure l'angle donné O ; puis faisant coïncider le diamètre de l'instrument avec ABC, le centre étant sur B, on marque un point I sur le papier, à côté de l'endroit de la circonférence où finit l'arc intercepté entre les côtés de l'angle O ; on tire la droite BI. L'angle IBC = O, puisque ces deux angles ont la même mesure.

Problème.

115 bis. *Étant donnés deux angles* B, C, *d'un triangle, construire le troisième.*

Le troisième angle cherché est le supplément de la somme des deux autres. En un point O d'une ligne XY on fait d'abord un angle IOY = B (nº 115); puis avec OI comme premier côté, au point O comme sommet on construit un second angle HOI = C; l'angle HOX, qui se trouve alors à gauche, est le troisième angle cherché; car il est le supplément de la somme HOY des angles donnés.



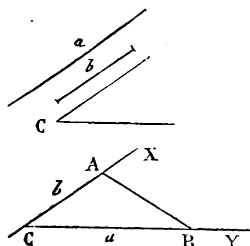
Avec le rapporteur on résout aisément ce problème. On prend la mesure de l'angle B; puis faisant coïncider le diamètre avec XY, le centre étant en O, on marque un point I à côté du point de la circonférence où finit la mesure de l'angle B; cela fait, on mesure l'angle C; puis on transporte l'instrument de manière que le centre étant en O, le demi-diamètre coïncide avec la droite OI; puis on marque le point H où finit la mesure de l'angle C; enfin on tire OH, ce qui produit l'angle HOX, qui est évidemment l'angle cherché, supplément de B + C (*).

(*) On peut aussi, mesurant successivement les angles B et C, l'un à partir du demi-diamètre de droite, l'autre à partir du demi-diamètre de gauche, marquer en I et H les extrémités de ces mesures quand le diamètre du rapporteur est sur XY, puis tirer les droites OI, OH; l'angle IOH est alors l'angle cherché.

Problème.

116. *Construire un triangle connaissant deux de ses côtés et l'angle compris.*

Soient *a*, *b* les côtés donnés, C l'angle donné. On construit, avec ou sans rapporteur, un angle XCY = l'angle C donné; sur l'un des côtés CY on prend avec le compas une longueur CB = *a*, puis, sur CX une longueur CA = *b*; on mène ensuite la droite AB; le triangle ACB ainsi obtenu répond évidemment à la question.



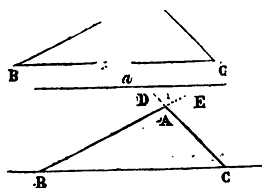
Ce problème est toujours possible.

Problème.

117. *Construire un triangle connaissant un côté et deux de ses angles.*

Soient *a* le côté donné, B et C les angles donnés. Il peut se présenter deux cas :

1° Les angles donnés B et C sont adjacents au côté donné *a*; dans ce cas on prend sur une ligne indéfinie une longueur BC=*a*; au point B de BC on fait, avec ou sans rapporteur (115), un angle CBE = l'angle donné B; puis, au point C de la même ligne, on fait l'angle BCD = C; les deux lignes BE, CD se rencontrent en un point A; on a ainsi un triangle ABC, qui répond évidemment à la question.



2° Si l'un des angles donnés, B par exemple, est adjacent au côté donné, et l'autre C, opposé, on construit le troisième angle comme il a été expliqué n° 115 *bis*; puis, avec le côté donné, l'angle B et l'angle trouvé, on construit le triangle comme il vient d'être indiqué (1°).

Autrement : Sur une ligne indéfinie on prend une longueur BC égale au côté donné; on fait au point B un angle CBE égal à l'angle

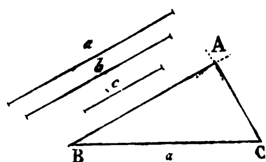
adjacent donné A ; en un point quelconque de BE on fait un angle BIH égal à l'angle opposé C ; puis on mène par le point C, à l'aide d'une équerre, une parallèle CD à IH.

Remarque. La somme des angles de tout triangle étant égale à deux droits, pour que notre problème soit possible, il faut que la somme des deux angles donnés soit moindre que deux droits. Si cette condition est remplie, le troisième angle peut être construit, et en opérant comme précédemment, on obtiendra certainement deux lignes BE, CD, qui se coupent.

Problème.

118. *Construire un triangle dont on donne les trois côtés a, b, c.*

On prend sur une ligne indéfinie une longueur BC $= a$; puis du point B comme centre avec une ouverture de compas égale à b on décrit un arc de cercle ; du point C comme centre avec un rayon égal à c, on décrit un autre arc de cercle ; ces deux arcs se rencontrent en un point A ; on mène les droites BA, CA ; on a ainsi un triangle ABC qui répond évidemment à la question.



Remarque. Pour que notre problème soit possible, il faut que l'un quelconque des côtés soit moindre que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence ; car il ne peut exister de triangle pour lequel ces conditions ne seraient pas remplies. Si d'ailleurs le plus grand côté a est moindre que $b + c$, on obtient, en opérant comme nous l'avons fait, deux arcs qui se coupent en A (103), et le triangle peut toujours être construit.

Problème.

119. *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un deux.*

Soient a, b les côtés donnés, et l'angle A donné opposé à a. On construit un angle XAY égal à l'angle donné A ; sur l'un de ses côtés AX, on prend une longueur AC égale au côté donné adjacent b ; puis du point B comme centre avec

un rayon égal à a on décrit un arc de cercle qui coupe généralement le second côté AY de l'angle ; soit B un point de rencontre ; on mène la droite CB, et on a ainsi un triangle CAB, qui répond à la question ; car il a l'angle donné et les côtés donnés, disposés comme on l'a demandé.

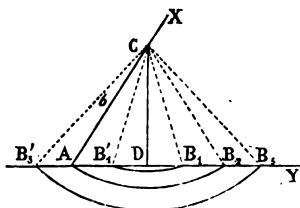
Discussion. Ce problème n'est pas toujours possible ; et quand il est possible, il a quelquefois deux solutions. Nous allons, pour nous exercer à une discussion géométrique, examiner les différents cas qui peuvent se présenter. Observons d'abord qu'avant d'employer le côté a opposé à l'angle donné A, on a déjà construit l'angle donné XAY et pris $AC = b$. On peut abaisser du point C sur AY la perpendiculaire CD ; supposons cette perpendiculaire abaissée ; le côté a devra partir du point C et atteindre AY ; donc il ne saurait être moindre que CD, qui est la plus courte ligne qui puisse aller de C à AY ; donc 1° on doit avoir $a \geqq CD$; si cette condition n'est pas remplie, de quelque manière qu'on s'y prenne, on ne pourra faire un triangle avec les données ; si on opère comme nous l'avons fait, il arrive que l'arc de cercle décrit n'atteint pas AY. Supposons donc cette condition remplie, et a au moins égal à CD ; supposons-le même, en général, plus grand ; alors a est une oblique allant de C à AY, et on peut placer deux de ces obliques l'une à *droite*, l'autre à gauche de CD. Cela posé, il peut se présenter trois cas : 1° l'angle donné A est *obtus ;* 2° il est *droit ;* 3° il est *aigu.*

1° A est *obtus* ; dans ce cas, l'oblique égale à a, située à gauche de CD, ne peut convenir ; car elle est vis-à-vis de l'angle XAZ, qui n'est pas l'angle donné l'oblique de droite ne pourra convenir qu'autant que son pied dépassera le point A ; et pour cela il faut que l'on ait a plus grand que l'oblique b déjà construite ; alors l'arc de cercle atteint AY en un point B, tel que le triangle CAB réponde à la question. Donc si A est obtus, il n'y a qu'une solution, et pour qu'elle existe, il faut que le côté donné opposé a soit plus grand que b ; ce que l'on pouvait prévoir, puisque l'angle A est le plus grand des angles du triangle.

2° L'angle A est *droit ;* alors CD et b se confondent ; si donc le côté a est plus grand que b, la construction indiquée donne deux obliques égales à a, l'une à droite, l'autre à gauche, qui produisent deux triangles CDB, CDB' identiquement égaux ; ce qui ne fait qu'une solution.

3° cas. A *aigu.* Dans ce cas, si a est égal à la perpendiculaire CD, l'arc de cercle décrit touche en D la ligne ZAY, et le triangle rectangle CAD répond à la

question ; si a est plus grand que CD, l'oblique de droite égale à a convient toujours, et fournit une première solution de la question. Si a est en même temps moindre que b, ex. CB_1, en prenant $DB'_1 = DB_1$, et joignant CB_1, CB'_1, on a deux triangles CAB_1, CAB'_1, qui répondent tous deux à la question ; car ils ont chacun l'angle donné et les deux côtés donnés disposés comme il est demandé. La construction indiquée fournit ces triangles, l'arc de cercle passant en B_1 et B'_1. Si le côté $a = b$, l'arc de cercle vient passer en A, et les deux obliques égales à a ne fournissent qu'un seul triangle isocèle CAB_2. Enfin, si a est plus grand que b, la deuxième oblique dépasse CA vers la gauche, et le second triangle CAB'_3 ne convient pas, puisque l'angle CAB'_3 n'est pas l'angle donné; mais le triangle CAB_3 est une solution. Ainsi, dans le cas de A aigu, il y a toujours une solution si a est au moins égal à la perpendiculaire CD; il y en a même deux dans le seul cas où a est en même temps plus petit que b. Nous avons examiné tous les cas qui peuvent se présenter.

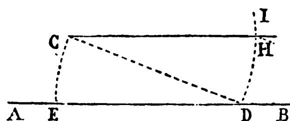


Problème.

Tracé des parallèles.

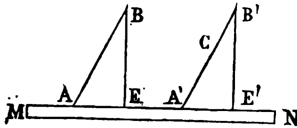
120. *Par un point donné* C, *mener une parallèle à une droite* AB.

Je joins le point C à un point quelconque, D de AB; puis je fais avec CD au point C un angle DCH égal à l'angle CDE (115); ces angles *égaux* CDA, DCH ayant la position d'angles ***alternes internes*** par rapport à la sécante CD, les lignes AB, CH sont parallèles (59).



Pour construire l'angle DCH = CDA, on peut employer le rapporteur, ou bien, faire comme il a été expliqué n° 115; du point D comme centre on décrit un arc CE qui s'arrête sur AD; puis du point C comme centre, avec la même ouverture de compas, on décrit l'arc indéfini DI, au-dessus de AB; puis du point D comme centre avec un rayon égal à la corde de CE on décrit un arc qui coupe DI en H; enfin on mène la droite CH, qui est la parallèle cherchée (CE = DH et CDA = DCH).

Emploi de l'équerre. Les parallèles se mènent le plus souvent à l'aide de l'équerre, comme il suit : on pose l'équerre sur le papier, de manière que son hypoténuse coïncide avec la droite AB, à laquelle on veut mener une parallèle; puis, adaptant une règle contre le côté AE de l'angle droit, on fait glisser l'équerre, en maintenant la règle fixe, jusqu'à ce que son hypoténuse vienne passer par le point C donné; on tire une ligne A'CB' le long de cette hypoténuse; A'CB' est la parallèle demandée; car l'angle B'A'E' est le même que BAE, et ils ont la position d'angles correspondants.



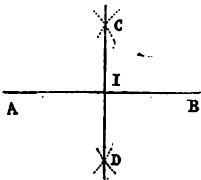
REMARQUE. Pour qu'on puisse mener ainsi des parallèles, il n'est pas nécessaire que le plus grand angle de l'équerre soit exactement droit; il suffit évidemment que les bords en soient bien dressés et vérifiés comme le bord d'une règle.

Tracé des perpendiculaires.

Problème.

121. *Diviser une droite donnée* AB *en deux parties égales.*

Du point A comme centre avec un rayon quelconque plus grand, à vue d'œil, que la moitié de AB on décrit deux arcs de cercle, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de AB, comme il est indiqué; puis du point B comme centre, avec la même ouverture de compas, on décrit de même deux arcs de cercle qui coupent respectivement les premiers, l'un en C, l'autre en D; on joint C et D par une ligne droite qui rencontre AB en I; le point I divise la droite AB en deux parties égales. En effet, il résulte de la construction que chacun des points C, D est également distant de A et de B; ces deux points appartiennent donc à la perpendiculaire élevée au milieu de AB (45); cette perpendiculaire n'est autre que CD, puisque deux points déterminent une ligne droite.



REMARQUE. Les deux arcs soit au-dessus de AB, soit au-dessous, se coupent, puisque chacun des rayons *égaux* AC, CB étant plus

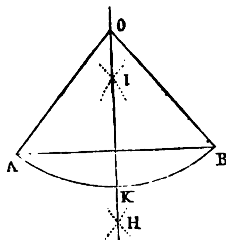
grand que $\frac{1}{2}$ AB, leur somme AC + CB est plus grande que AB, distance des centres des deux arcs (103).

Ayant divisé AB en deux parties égales, on peut, en opérant de même, diviser AI, puis IB, chacun en deux parties égales; puis encore chaque nouvelle partie en deux, et ainsi de suite. On sait donc diviser une droite en 2, en 4, en 8, en 16... parties égales.

Problème.

122. *Diviser un arc ou un angle donné en deux parties égales.*

Soit AB l'arc donné; on joint les extrémités A et B; puis on construit, comme il vient d'être indiqué, une perpendiculaire IH, qui divise la corde AB en deux parties égales; IH perpendiculaire au milieu de la corde AB passe par le centre O, et divise l'arc AB en deux parties égales (91).



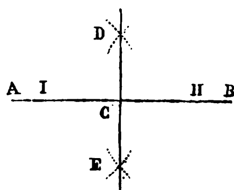
Pour diviser un angle donné AOB en deux parties égales, on décrit, de son sommet comme centre, un arc AB compris entre ses côtés; on mène la corde AB; puis on abaisse de O une perpendiculaire sur AB, laquelle divise l'arc AKB et l'angle AOB chacun en deux parties égales; AK = KB; donc AOK = KOB.

Remarque. La même perpendiculaire OK divise la corde, l'arc, l'angle, le secteur et le segment, chacun en deux parties égales.

Problème.

123. *En un point donné* C *d'une droite donnée* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

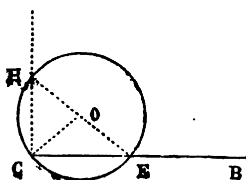
Je prends sur AB à partir de C deux longueurs égales CI, CH; (puis j'opère comme si je voulais diviser IH en deux parties égales par une perpendiculaire); du point I comme centre avec un rayon plus grand que IC je décris deux arcs de cercle, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de AB; puis du point H, avec le même rayon, deux autres arcs



qui rencontrent les premiers aux points D et E; la droite DE qui passe au point C est la perpendiculaire demandée. En effet, chacun des points E, D, étant également distant des points I et H, la droite DE est perpendiculaire à IH en son milieu C, ou à AB, qui est la ligne IH prolongée.

Remarque. Si le point C était à l'extrémité d'une droite qu'on ne puisse pas prolonger, on élèverait une perpendiculaire à cette droite en un autre point quelconque ; puis on mènerait par le point C une parallèle à cette perpendiculaire, à l'aide de l'équerre (120).

On peut aussi opérer comme il suit : du point O pris quelconque au-dessus de CB comme centre, avec le rayon OC, on décrit une circonférence qui rencontre la droite donnée en C et en E ; on mène le diamètre EOH, puis on tire CH, qui est la perpendiculaire demandée ; en effet, l'angle HCE inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.



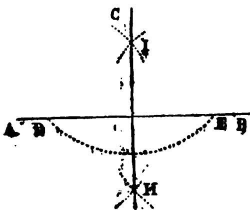
Emploi de l'équerre. Quelque part que soit le point donné C, on simplifie la construction en employant une équerre *vérifiée* exacte. Plaçant le sommet de l'angle droit de l'équerre en C, on fait coïncider l'un des côtés avec la droite donnée ; puis on tire le long du second côté de l'angle droit une ligne, qui est évidemment la perpendiculaire demandée.

Mais, nous le répétons, il faut, pour opérer ainsi, une équerre *vérifiée*.

Problème.

124. *Abaisser d'un point* C *donné, hors d'une droite* AB, *une perpendiculaire à cette ligne.*

Du point donné C comme centre, avec un rayon suffisamment grand, on décrit un arc de cercle qui rencontre la droite AB en deux points D, E; de D comme centre, avec un rayon plus grand que la moitié de DE, on décrit deux arcs de cercle, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de AB; puis de E comme centre, avec la même ouverture de compas, on décrit deux autres



arcs de cercle qui rencontrent les premiers en I et H; les trois points C, I, H étant également distants de D et E, si on joint IH, on a une droite IH passant par le point C, et perpendiculaire à DE en son milieu, et par suite à AB.

Emploi de l'équerre. On simplifie la construction en employant l'équerre, pourvu que ce soit une équerre *vérifiée*.

On dispose l'équerre de manière que l'un des côtés de l'angle droit glissant sur AB, l'autre vienne passer par le point C; alors en tirant une ligne le long de ce second côté, on a la perpendiculaire demandée.

Problème.

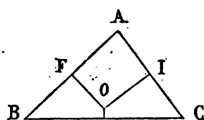
125. *Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés.*

Ce problème est complétement résolu p. 45, n° 97.

Circonscrire une circonférence à un triangle donné ABC.

C'est le même problème; on doit faire passer une circonférence par les trois points donnés A, B, C, non en ligne droite.

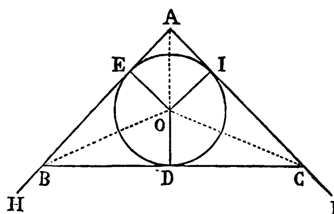
Ayant mené les perpendiculaires DO, FO à AB, BC, en leurs milieux, nous avons fait voir que OA=OB =OC; de OA=OC on conclut que le point O appartient à la perpendiculaire élevée au milieu du troisième côté AC. De là ce théorème : *les perpendiculaires élevées aux milieux des trois côtés d'un triangle passent au même point.*



Problème.

126. *Inscrire une circonférence dans un triangle donné.*

Je suppose le problème résolu; soient O le centre de la circonférence demandée; E, I, D, les points de contact avec les trois côtés du triangle; les lignes OE, OI, OD, sont des perpendiculaires à AB, AC, BC, égales entre elles comme rayons; le centre O de la circonférence à construire devant être également distant de AB et AC, se trouve sur la bissectrice de l'angle ABC (48); je mène cette bissectrice AO (122); ce même point O devant être également distant des lignes AB, AC, se trouve sur la bissectrice de l'angle ABC; je mène cette bissectrice BO. Les deux bissectrices se ren-



contrent en O; abaissons de O les perpendiculaires OI, OE, OD; O étant sur AO, on a OI = OE; O étant sur OB, on a OE = OD; donc OI = OE = OD; De O comme centre, je décris une circonférence avec OE pour rayon; cette circonférence touche évidemment les trois côtés aux points E, I, D.

C'est la seule circonférence que l'on puisse inscrire; en effet, il résulte du raisonnement que nous avons fait en commençant, que toute circonférence inscrite ne peut avoir pour centre que le point commun aux bissectrices, lequel est unique.

REMARQUE. Le point O, point de rencontre des bissectrices AO, BO, étant tel que OI = OE = OD, à cause de OI = OD, se trouve sur la bissectrice de l'angle BCA : donc *les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent au même point.*

En prolongeant chacun des côtés du triangle dans les deux sens, et considérant les espaces tels que HBCK, on voit, en menant les bissectrices qui rencontrent au même point AO prolongée, qu'on peut inscrire dans chacun de ces espaces une circonférence tangente à la fois aux 3 lignes, AB, AC, BC prolongées indéfiniment. Il y a 3 espaces de ce genre en dehors du triangle ABC; *on peut donc décrire 4 circonférences tangentes à 3 droites* AB, AC, AD, *qui se coupent deux à deux; les* 3 *dernières indiquées sont dites ex-inscrites au triangle* ABC.

Problème.

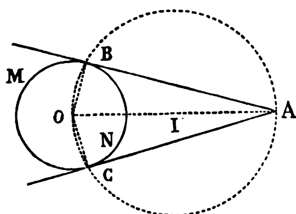
127. *Mener une tangente à une circonférence par un point* A *donné sur cette circonférence.*

Il suffit évidemment de joindre le centre au point donné A, et de mener, par le point A, une perpendiculaire à ce rayon (à l'aide du compas ou de l'équerre).

Problème.

128. *Par le point* A *extérieur à un cercle mener une tangente à sa circonférence.*

Je joins le point A au centre O, puis je divise la droite OA en deux parties égales; du milieu I comme centre, avec le rayon IO = IA je décris une demi-circonférence qui rencontre la circonférence donnée en B et en C; je tire AB, AC; chacune de ces lignes est tangente à la circonférence donnée.



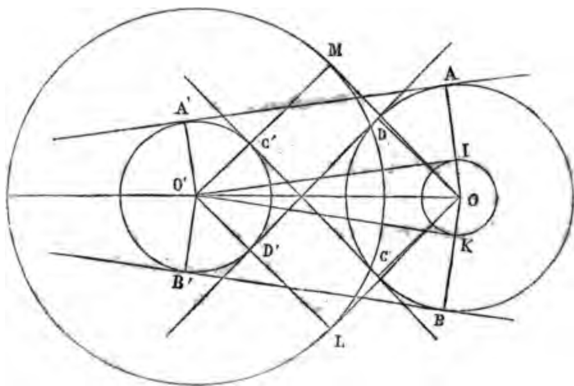
En effet, si on mène le rayon OB, on forme un angle OBA qui est droit ; car il est inscrit dans une demi-circonférence (110) ; la ligne AB perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB est une tangente menée de A à la circonférence donnée O; il en est de même de la ligne AC.

AB et AC sont les seules tangentes que l'on puisse mener du point A à cette circonférence ; en effet, s'il y en avait une troisième, celle-ci aurait son point de contact en un certain point N de l'arc BNC, ou en un point M de l'arc BMC ; imaginons menés cette tangente et le rayon ON ; l'angle ONA qui aurait son sommet dans l'intérieur de la circonférence I, aurait pour mesure $\frac{1}{2}$ OBA, ou un quadrant, plus la moitié de l'arc compris entre ses côtés prolongés au-dessous de N ; cet angle ONA serait obtus ; la ligne AN, n'étant pas perpendiculaire au rayon ON, ne serait pas tangente. On prouve de même qu'une ligne AM allant de A à un point de l'arc AMB ne peut être tangente ; l'angle AMO serait aigu.

Problème.

129. *Mener une tangente commune à deux cercles.*

Une tangente commune peut être *extérieure* aux deux circonférences, c'est-à-dire les laisser toutes deux du même côté, ex. : AA'; ou bien *intérieure,* passant entre les deux circonférences qu'elle sépare entièrement l'une de l'autre, ex. : CC'.



Supposons menée une tangente commune extérieure AA', et les deux rayons OA, O'A' aux points de contact ; si on mène par le point O' une parallèle O'I à la tangente A'A, cette ligne O'I, ren-

contrant OA, en détache une partie IA = O'A' et laisse au-dessous une seconde partie OI = OA — O'A'; comme d'ailleurs O'I parallèle à AA' est, comme celle-ci, perpendiculaire à OA, il résulte de là que si du point O comme centre, avec un rayon égal à OI = OA — O'A', on décrit une circonférence, circ. OI, celle-ci aura pour tangente cette parallèle O'I menée du centre O' à la tangente commune. Or la circonférence OI peut être tracée, on peut lui mener une tangente par le point O'; évidemment une parallèle AA' à cette tangente O'I, menée à une distance IA = O'A' sera une tangente commune; car elle sera perpendiculaire aux extrémités de deux rayons parallèles OA, O'A'. De là cette construction :

Pour mener une tangente commune extérieure à deux circonférences données O *et* O', *du centre* O *de l'une avec un rayon égal à la différence de leurs deux rayons, on décrit une circonférence, circ.* OI ; *du centre* O' *de l'autre circonférence, on mène les tangentes* O'I, O'K *à cette nouvelle circonférence* OI ; *puis, aux points de contact, les rayons* OI, OK, *que l'on prolonge jusqu'à la grande circonférence en* A *et* B ; *par ces points* A, B *on mène successivement des parallèles* AA', BB' *aux tangentes* O'I, O'K ; AA', BB' *sont deux tangentes communes extérieures aux circonférences données, les seules qu'on puisse mener* (*).

Car AA', BB' remplissent chacune les conditions indiquées par l'analyse précédente, et peuvent seules les remplir.

Soit maintenant une tangente commune *intérieure* CC'; menons les rayons OC = R, O'C' = R' et prolongeons O'C' jusqu'à OM parallèle à CC' menée par le centre O; O'M est perpendiculaire à OM; de plus O'M = O'C' + C'M = O'C' + OC = R' + R; si donc de O' comme centre avec un rayon égal à la somme des rayons, O'C' + OC, des circonférences données, on décrit une circonférence, celle-ci aura pour tangente cette parallèle OM menée de O

(*) Ceux qui préfèrent la méthode synthétique commenceront par indiquer cette construction, qu'ils pourront justifier *à posteriori* comme il suit :

De ce que OI = R — R' = R — IA, on conclut que IA = R'; si on mène O'A' parallèle à OA, la figure IO'A'A est un parallélogramme, et même *un rectangle*, puisque l'angle I est droit (O'I tangente); de sorte que O'A' = IA = R'; donc AA' est perpendiculaire aux extrémités des rayons OA, O'A' des deux circonférences ; c'est donc une tangente commune à ces deux courbes.

On démontre de même pour BB'.

à la tangente commune CC′. Or cette circonférence de rayon, $R+R'$, peut être construite immédiatement; on peut lui mener de O une tangente OM; évidemment une parallèle à cette tangente OM, menée entre les deux centres O et O′, à la distance $MC'=OC$, sera une tangente commune, car elle sera perpendiculaire aux extrémités de deux rayons parallèles. De là cette construction :

CONSTRUCTION. *Pour mener une tangente commune intérieure à deux circonférences données* O *et* O′, *de l'un des centres* O′ *avec un rayon égal à la somme des rayons donnés,* $R+R'$, *on décrit une circonférence, circ.* O′M, *à laquelle on mène, du centre* O *de l'autre circonférence donnée, des tangentes* OM, OL; *on joint le centre* O′ *à chaque point de contact* M *ou* L; *ces lignes* O′M, O′L *rencontrent circ.* O′ *en* C′ *et* D′; *par* C′ *et* D′ *on mène successivement des parallèles* C′C, D′D *à* OM *et* OL; C′C *et* D′D *sont deux tangentes communes intérieures à circ.* O *et circ.* O′, *les seules qu'on puisse mener* (*); car ces deux lignes remplissent seules toutes les conditions indiquées par l'analyse précédente.

DISCUSSION. Notre raisonnement prouve, dans l'un et l'autre cas, que les tangentes extérieures ne peuvent exister sans les tangentes O′I, O′K, et réciproquement; ni les tangentes intérieures sans les tangentes OM, OL, et réciproquement. Il n'y a donc pas d'autres tangentes communes possibles que celles que nous avons indiquées.

Pour que les tangentes O′I, O′K puissent être menées, il faut et il suffit que le centre O′ ne soit pas intérieur à la circonférence décrite de O comme centre avec un rayon égal à $R-R'$, c'est-à-dire que l'on n'ait pas la distance des centres $D<R-R'$.

De même, pour que les tangentes OM, OL puissent être menées, il faut et il suffit que le centre O ne soit point intérieur à la circonférence décrite du centre O′ avec le rayon $R+R'$; c'est-à-dire que l'on n'ait pas $D<R+R'$. Cela posé, on peut résumer ainsi tous les cas possibles.

1° Si les circonférences données sont extérieures l'une à l'autre, on a $D>R+R'$, et *à fortiori* $D>R-R'$; on peut donc alors mener les 4 tangentes communes.

4° Si les circonférences se touchent, $D=R+R'$; et $D>R-R'$; la circonférence O′M passe par O; les deux tangentes OM, OL se réduisent à une seule; il y a une seule tangente intérieure et deux extérieures.

(*) Ceux qui préfèrent la méthode synthétique pourront commencer par faire les constructions indiquées, qu'ils justifieront ensuite comme dans le premier cas.

De ce que $O'M=R'+R=O'C'+C'M$, on conclut $C'M=R$, etc., comme dans le cas précédent.

3° Si les deux circonférences données se coupent, $D < R + R'$; les deux tangentes intérieures n'existent plus; $D > R - R'$; on peut construire deux tangentes extérieures.

4° Si les deux circonférences données se touchent intérieurement, comme on a $D = R - R'$, $D < R + R'$, il n'y a plus qu'une tangente commune, laquelle est extérieure; O'I et O'K se confondent.

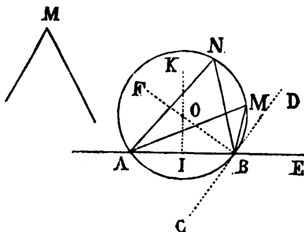
5° Enfin, si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre sans se toucher, on a à la fois $D < R - R'$, $D < R + R'$; il n'y a plus de tangentes communes, comme on devait s'y attendre.

Problème.

130. *Décrire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné;*

C'est-à-dire *un segment tel que tous les angles qui y sont inscrits soient égaux à un angle donné.*

Je tire une perpendiculaire IK au milieu de AB, puis je fais en B avec AB un angle ABC égal à l'angle donné M (115); au point B j'élève sur CB une perpendiculaire BF à BD; cette ligne rencontre IK au point O; du point O comme centre, avec le rayon OB, je décris une circonférence qui passe en A et en B; le segment ANMB de cette circonférence est le segment demandé. En effet, l'angle ABC = M a pour mesure la moitié de l'arc AB; or chacun des angles, tels que M et N, inscrits dans le segment ANMB, a la même mesure.



Ce problème est toujours possible.

Le segment inférieur est capable d'un angle supplémentaire de l'angle donné M.

Remarque. *L'arc* ANMB *est le lieu géométrique de tous les points du plan situés au-dessus de* AB, *tels que si l'on joint chacun d'eux aux points* A *et* B *par des droites, on ait un angle égal à l'angle donné.*

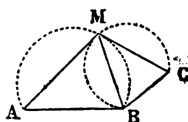
On voit facilement, en effet, que si on joint A et B à un point intérieur ou extérieur à ce segment, on obtient un angle ayant

une mesure plus grande ou plus petite que $\frac{1}{2}$ AB, mesure de AMB = M.

Problème.

131. *Trouver sur un plan un point* M *tel que deux lignes données,* AB, BC, *soient vues de ce point sous des angles donnés,* par exemple : AMB = 60°, BMC = 45°.

Il résulte de la dernière remarque que le point M doit se trouver sur l'arc du segment capable d'un angle de 60° construit sur la ligne donnée AB; je construis donc sur AB un segment capable d'un angle de 60°; de même je construis sur AB un segment capable d'un angle de 45°; le point M se trouvera sur le nouvel arc. Il sera donc à la rencontre des deux arcs (*).



De la plus grande commune mesure de deux lignes.

1. Pour évaluer exactement le rapport de deux lignes, il faut connaître une commune mesure de ces lignes, c'est-à-dire une ligne qui soit contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles.

Si deux lignes A et B ont une commune mesure C, elles en ont une infinité; en effet, toutes les parties aliquotes de cette ligne C (sa moitié, son tiers, son quart, etc.) sont autant de communes mesures de A et B; le quart de C, par exemple, est contenu dans A ou B quatre fois autant de fois que la ligne C elle même.

2. Parmi toutes les communes mesures que peuvent avoir deux lignes A et B, la plus *grande* est la plus importante et la plus facile à déterminer; c'est d'ail-

(*) Si la somme de l'angle ABC (des droites données) et des deux angles donnés AMB, BMC valait deux droits, le problème proposé aurait une infinité de solutions. Les deux constructions de segments capables produiraient la même circonférence passant par A, B, C, dont tous les points intérieurs à l'angle ABC répondraient à la question. Cela tient à ce que dans le quadrilatère AMCB la somme des angles opposés AMC + ABC = 2 droits; il résulte de là que ce quadrilatère est inscriptible dans une circonférence, qui est alors la circonférence unique passant par les trois points A, B, C.

leurs de celle-là que dérivent toutes les autres (V. ci-après n° 7) (*). Pour trouver la plus grande commune mesure de deux lignes données, on raisonne et on opère exactement comme pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres; seulement les divisions se font ici à l'aide du compas.

Soit B la plus petite des 2 lignes données : si B était contenue un nombre entier de fois dans A, B serait évidemment la plus grande commune mesure. On est donc conduit à porter, avec le compas, la ligne B sur la ligne A autant de fois que possible. Supposons qu'elle y soit contenue 3 fois avec un reste R :

$$A = 3B + R. \qquad (1)$$

Toute commune mesure de A et de B est contenue un nombre entier de fois dans 3B, et par suite dans R; c'est une commune mesure de B et de R. Réciproquement, toute commune mesure de B et de R est contenue un nombre entier de fois dans 3B, et par suite dans A; c'est une commune mesure de A et de B. Toutes les communes mesures de A et B étant les mêmes, chacune à chacune, que les communes mesures de B et R, la plus grande parmi les unes est la plus grande parmi les autres.

La plus grande commune mesure de deux lignes données A et B, est donc la même que la plus grande commune mesure de la plus petite des deux et du reste, R, de leur division.

Pour trouver la plus grande commune mesure de B et de R, on portera avec le compas la ligne R sur B autant de fois que possible. Supposons qu'elle y soit contenue 2 fois avec un reste R' :

$$B = 2R + R'. \qquad (2)$$

Le même raisonnement conduit à porter la ligne R' sur R autant de fois que possible; supposons qu'elle y soit contenue 5 fois avec un reste R'':

$$R = 5R' + R'', \text{ etc.} \qquad (3)$$

On continue ainsi jusqu'à ce qu'un reste soit contenu exactement dans le précédent.

$$R' = 4R'' + R''' \qquad (4)$$
$$R'' = 2R'''. \qquad (5)$$

Il résulte de ce raisonnement que si les deux lignes données A et B ont une commune mesure appréciable au compas, on trouvera leur plus grande commune mesure en opérant comme il va être indiqué.

3. Règle. *Pour trouver la plus grande commune mesure de deux lignes données* A *et* B; *on porte avec le compas la plus petite ligne*, B *par exemple, sur*

(*) En prenant la plus grande commune mesure de deux lignes pour unité, on obtient la plus simple expression du rapport de ces lignes ; en effet, cette mesure est celle qui est contenue le moins de fois dans chacune des lignes données.

la plus grande, autant de fois que possible ; si elle y est contenue un nombre entier de fois exactement, cette plus petite ligne est la plus grande commune mesure cherchée. S'il y a un reste R, *on porte avec le compas cette ligne* R *sur* B *autant de fois que possible ; si on obtient ainsi un deuxième reste* R', *on porte la ligne* R' *sur* R *autant de fois que possible, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'une de ces divisions se fasse sans reste, ou bien que le reste devienne si petit qu'on ne puisse plus le porter avec le compas sur le reste précédent. Si le premier cas se présente, le dernier reste trouvé est la plus grande commune cherchée des deux lignes données. Dans le second cas, on conclut que les deux lignes données n'ont pas de commune mesure aussi grande que le dernier reste, si elles en ont une.*

4. Quand ces opérations ont fait connaître la plus grande commune mesure de deux lignes A et B, si on veut connaître leur rapport, on exprime par une égalité le résultat de chaque division ; puis on fait usage comme il suit des égalités que l'on a écrites :

$$A = 3B + R \quad (1)$$
$$B = 2R + R' \quad (2)$$
$$R = 5R' + R'' \quad (3)$$
$$R' = 4R'' + R''' \quad (4)$$
$$R'' = 2R'''. \quad (5)$$

On remonte de la dernière égalité à la première, en remplaçant chaque ligne qui entre dans une égalité quelconque par le nombre de lignes R''' qu'elle renferme. On a ainsi successivement

$$R''=2R''' ;\ R'=8R'''+R'''=9R''' ;\ R=45R'''+2R'''=47R''' ;$$
$$B=94R'''+9R'''=103R''' ;\ A=309R'''+47R'''=356R'''.$$

De ces valeurs de A et B on conclut que

$$\frac{A}{B}=\frac{356R'''}{103R'''}=\frac{356}{103}.$$

5. Pour trouver la plus grande commune de deux arcs de cercle de même rayon, et par suite leur rapport, on opère exactement de la même manière que pour deux droites.

1re Remarque. De ce que R'' est la plus grande commune mesure des lignes A et B, il résulte que $\frac{356}{103}$ est *la plus simple expression* du rapport de ces deux lignes (*V.* la note précédente).

2e Remarque. L'emploi d'une autre commune mesure quelconque de A et B devra donner pour valeur de $\frac{A}{B}$ une fraction égale à $\frac{356}{103}$; celle-ci étant irréductible, toute fraction égale aura pour termes des équimultiples de 356 et 103; supposons que pour une commune mesure m, on trouve $\frac{A}{B}=\frac{1068}{309}$; $1068 = 356\times 3$; $309=103\times 3$; $A=356\times 3m$; $B=103\times 3m$; donc $3m=M$.

La commune mesure m est une partie aliquote de la plus grande commune M ; ceci est général.

Toutes les communes mesures de deux lignes sont les parties aliquotes de leur plus grande commune mesure.

Des lignes qui n'ont pas de commune mesure.

139. Il peut arriver que deux lignes a et b n'aient pas de commune mesure, soient incommensurables entre elles. La définition ordinaire (136) ne peut s'appliquer au rapport de ces deux lignes ; alors on se dirige d'après les considérations suivantes.

La centième partie de b est contenue dans a un certain nombre de fois, *au plus;* 84 fois par ex. ; a contient les 0,84 de b, pas 0,01 de plus.

La millième partie de b est contenue dans a un certain nombre de fois, *au plus;* 847 fois par ex. ; a contient les 0,847 de b, pas 0,001 de plus.

La dix-millième partie de b est contenue dans a un certain nombre de fois, *au plus;* 8475 fois par ex. ; a contient les 0,8475 de b, pas 0,0001 de plus.

Et ainsi de suite.

Le rapport de a à b, $\frac{a}{b}$ est la limite des nombres 0,84, 0,847, 0,8475, etc., ainsi obtenus (*).

On dit que le rapport $\frac{a}{b}$ est 0,84 à moins de 0,01 ; que c'est 0,847 à moins de 0,001 ; 0,8475 à moins de 0,0001 ; etc. (**).

Dans les applications et les calculs on remplace chaque rapport incommensurable par une de ses valeurs commensurables indéfiniment approchées. Ex. : Le rapport $\frac{a}{b}$ ci-dessus se remplace par l'un des nombres 0,84, 0,847, 0,8475, etc. (***).

Considérant dans les raisonnements les rapports incommensurables comme ainsi remplacés, on leur attribue toutes les propriétés des rapports ordinaires

---

(*) Ces nombres ont une limite ; car chacun d'eux est inférieur à 0,85, ou à 0,848.

(**) Soient $a'=0{,}84b$; $a''=0{,}847b$; $a'''=0{,}8475b$, etc... ; a', a'', a'''... sont des lignes commensurables avec b, qui diffèrent de moins en moins de a, et finissent par en différer d'une longueur moindre que toute ligne donnée, si petite qu'elle soit. Ces lignes a', a'', a''' ont donc a pour *limite;* or 0,84, 0,847, 0,8475... expriment les rapports de ces lignes comparées successivement à la même ligne b. C'est pourquoi on définit $\frac{a}{b}$ la limite vers laquelle tendent ces rapports commensurables $\frac{a'}{b}=0{,}84$; $\frac{a''}{b}=0{,}847$; $\frac{a'''}{b}=0{,}8475$.

(***) Ce qui revient à remplacer la ligne a par l'une des lignes de plus en plus approchées $0{,}84b$; $0{,}847b$; $0{,}8475b$, etc., commensurables avec b.

entre les nombres entiers ou fractionnaires; *nous ne ferons donc dans ce qui va suivre aucune distinction entre les uns et les autres.*

C'est en se plaçant à ce point de vue, qu'ayant à démontrer une égalité de rapports, on regarde la proposition comme vraie en général, quand on l'a démontrée pour le cas où les termes de l'un des rapports ont une commune mesure, si petite qu'elle soit (V. le programme). En effet, s'il se présente alors deux rapports entre des grandeurs incommensurables, il résulte de ce qui a été démontré pour le cas d'une commune mesure, que deux valeurs approchées *correspondantes* quelconques de ces rapports (ex. : leurs valeurs approchées à moins de 0,001) sont égales entre elles (V. page 54). Il en est donc de même des limites de ces valeurs approchées qui sont les rapports incommensurables.

Ceux qui voudront préciser davantage pourront employer, dans le cas où les deux rapports considérés seraient incommensurables, un raisonnement analogue à celui que nous avons fait n° 104 pour les arcs et les angles au centre. Quant à nous, nous suivrons désormais la prescription du programme, rappelée ci-dessus.

Tout ce que nous venons de dire s'applique à toutes les grandeurs géométriques incommensurables quelconques.

LIVRE III.

RELATIONS NUMÉRIQUES ENTRE LES LIGNES DE DIVERSES FIGURES. — FIGURES SEMBLABLES. — POLYGONES RÉGULIERS.

PRÉLIMINAIRES.

133. Le *rapport* de deux lignes n'est autre que le *rapport* ou le *quotient* de deux nombres qui expriment les longueurs de ces lignes mesurées avec la même unité ou commune mesure.

Ex. : Ayant mesuré deux lignes avec le mètre divisé en centimètres, on a trouvé $2^m,15$ ou 215 centimètres pour la longueur de l'une, et $1^m,8$ ou 180 centimètres pour la longueur de l'autre; le rapport de la première ligne à la seconde est $\frac{2^m,15}{1^m,8}$ ou $\frac{215}{180}$ (*).

134. Étant donnée une égalité de rapports entre des lignes

$$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{PQ}, \qquad (1)$$

on peut regarder les termes de chaque rapport comme étant les lignes désignées elles-mêmes, ou bien deux nombres exprimant

(*) Le rapport de deux lignes exprime la valeur de la première, quand la seconde sert d'unité. Dans l'exemple ci-dessus, 1 centimètre est la 180ième partie de la seconde ligne ; la première, qui vaut 215 centimètres, vaut les $\frac{215}{180}$ de la seconde. Si donc celle-ci était l'unité linéaire, la première vaudrait $\frac{215}{180}$, et serait exprimée par $\frac{215}{180}$.

les longueurs de ces lignes mesurées avec la même unité ; l'égalité (1) est vraie à l'un ou à l'autre point de vue.

Cette remarque s'applique aux égalités qu'on déduit des égalités de rapport telles que (1), par les opérations ou transformations usitées sur les nombres. Les notations AB, CD... continuent à y désigner ou les lignes elles-mêmes, ou les nombres qui expriment les longueurs de ces lignes.

C'est le raisonnement et le sens de la question traitée qui indiquent l'interprétation qu'il faut donner à ces notations.

135. Quelquefois une égalité ne peut avoir lieu qu'entre des nombres. Par exemple, en réduisant les rapports de l'égalité (1) au même dénominateur, on trouve d'abord

$$\frac{AB \times PQ}{CD \times PQ} = \frac{MN \times CD}{CD \times PQ},$$

d'où l'on conclut

$$AB \times PQ = MN \times CD. \qquad (2)$$

Comme on ne saurait attacher un sens précis au produit d'une ligne par une ligne, on interprète comme il suit cette égalité (2) : *Le produit des nombres qui expriment les longueurs de* AB *et* PQ *est égal au produit des nombres qui expriment les longueurs de* MN *et* CD.

En général, quand on rencontrera *dans ce livre* un produit tel que AB $\times$ PQ, *il s'agira du produit des nombres qui expriment les longueurs de* AB *et* PQ.

Quand on trouvera un carré tel que $\overline{MN}^2$, *il s'agira du carré du nombre qui exprime la longueur de la ligne* MN.

136. Définition. Une ligne MN est dite *moyenne proportionnelle* ou *moyenne géométrique* entre deux lignes AB, CD, quand on a entre les trois lignes l'égalité de rapports

$$\frac{AB}{MN} = \frac{MN}{CD}, \qquad (3)$$

ou entre les nombres qui expriment ces lignes l'égalité équivalente $\overline{MN}^2 = AB \times CD$. (4)

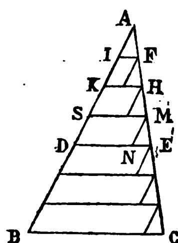
LIGNES PROPORTIONNELLES.

Théorème.

137. *Toute ligne parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles.*

Si DE est parallèle à BC, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Supposons que AD et DB aient une commune mesure, AI, contenue 4 fois dans AD et 3 fois dans DB; le rapport $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{3}$ (n° 132). AD étant divisé en 4 parties égales à AI, et DB en 3, menons par chaque point de division une parallèle à DE ou à BC; AE sera ainsi divisé en 4 parties, et EC en 3. Je dis que ces 7 parties de AC sont égales entre elles; pour le prouver, je mène par chacun des points de division F, H, M,... une parallèle à AB, que je termine à la parallèle horizontale inférieure. Je forme ainsi des triangles tels que AIF, qui sont égaux entre eux; par ex.: AIF = MNE; en effet, MN = DS (côtés opposés d'un parallélogramme), et DS = AI par construction; donc MN = AI; l'angle NME = IAF (correspondants); l'angle MNE = AIF (côtés parallèles et dirigés dans le même sens); les deux triangles sont donc égaux, et ME = AF. Chaque partie de AC étant égale à AF, AF est une commune mesure contenue 4 fois dans AE et 3 fois dans EC; donc le rapport $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{3}$; mais déjà $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{3}$; donc $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$, ce qu'il fallait démontrer.



Ce raisonnement démontre le théorème pour tous les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, entre les segments AD, DB du même côté AB; ce théorème est donc vrai en général (*).

(*) V. notre dernière remarque sur les rapports incommensurables.

138. Corollaire. *Le rapport d'un côté du triangle à l'une de ses parties est égal au rapport de l'autre côté à la partie correspondante :*

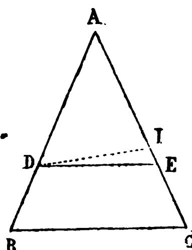
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \text{ ou bien } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

Cette proposition peut se démontrer directement de la même manière que la précédente (*V.* la figure); AB = 7, AD = 4, donc $\frac{AB}{AD} = \frac{7}{4}$; AC = 7; AE = 4; donc $\frac{AC}{EC} = \frac{7}{4}$; donc enfin $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; de même pour l'autre égalité.

Théorème (*Réciproque*).

139. *Si une ligne divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième côté.*

Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, la ligne DE est parallèle à BC. En effet, supposons que DE ne soit pas parallèle à BC; alors par le point D on peut mener une parallèle DI à BC; DI étant parallèle à BC, il résulte du théorème précédent que $\frac{AD}{DB} = \frac{AI}{IC}$; mais par hypothèse $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$; on aurait donc $\frac{AI}{IC} = \frac{AE}{EC}$; égalité fausse, car AI est plus petit que AE, et IC est plus grand que EC; deux raisons pour que le rapport $\frac{AI}{IC}$ soit plus petit que $\frac{AE}{EC}$. On est conduit à une égalité fausse en supposant que DE n'est pas parallèle à BC ; donc DE est parallèle à BC.

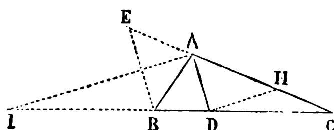


Théorème.

140. *La bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en parties ou segments proportionnels aux côtés adjacents.*

Si AD est la bissectrice de l'angle BAC, on a $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. (1)

Pour le démontrer, menons par le point B une parallèle à AD, qui rencontre en E le côté CA prolongé. Dans le triangle CBE, la ligne AD est parallèle à BE; on a donc l'égalité de rapports $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}$; or cette égalité serait



justement celle qu'il faut démontrer (égalité (1)), si AE était égal à AB, c'est-à-dire si le triangle EAB était isocèle. Mais AEB est en effet isocèle; car les angles AEB, CAD sont égaux comme correspondants; les angles ABE, BAD sont égaux comme alternes internes; or les angles CAD, BAD sont égaux par hypothèse (AD bissectrice); donc l'angle AEB$=$l'angle ABE; le triangle ABE est isocèle et AE$=$AB; remplaçant AE par AB dans l'égalité $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}$, il vient $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$; C. Q. F. D.

On démontre de la même manière que la bissectrice AI de l'angle BAE extérieur au triangle ABC, rencontre le côté opposé BC, prolongé, en un point I, tel que $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}$.

141. *Réciproquement : Si une ligne* AD *partant d'un sommet du triangle* ABC *divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, cette ligne divise l'angle* A *en deux parties égales.*

Supposons que l'on ait $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Menons encore BE parallèle à AD; on a alors $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}$ (137). De ces deux égalités résulte celle-ci : $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AC}$, d'où AE$=$AB. Le triangle ABE est isocèle, et l'angle E$=$ABE; mais l'angle E$=$DAC (correspondants); ABE$=$BAD (alternes externes); donc DAC$=$BAD, C. Q. F. D.

On peut démontrer cette réciproque, par l'absurde, comme la précédente : supposons que AD ne soit pas bissectrice, etc...

DES POLYGONES SEMBLABLES.

142. Définitions. Deux triangles sont *semblables* quand ils ont les angles égaux, chacun à chacun, et les côtés *homologues* proportionnels.

Les côtés *homologues* sont ceux qui sont opposés à des angles égaux.

143. En général, deux polygones sont *semblables* quand ils ont les angles égaux, chacun à chacun, et les côtés *homologues* proportionnels.

Les côtés *homologues* sont ceux qui sont adjacents à des angles égaux chacun à chacun.

Théorème.

144. *En coupant un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, on détermine un nouveau triangle semblable au premier.*

A D E B I C

Soit DE parallèle à BC, le triangle ADE est semblable au triangle ABC. En effet, d'abord l'angle A est commun; D = B; E = C (correspondants); nos triangles sont donc équiangles. Maintenant DE étant parallèle à BC, on a (nº 138, corollaire), $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; menons EI parallèle à AB; on aura $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BI}$; mais BI = DE (côtés opposés d'un parallélogramme); en remplaçant BI par DE, on a $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$; donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$. Les triangles ABC, ADE ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels; ils sont donc semblables.

Divers cas de similitude des triangles.

145. Il n'est pas nécessaire de savoir *à priori*, ou d'avoir démontré que deux triangles remplissent toutes les conditions indiquées dans la définition de deux triangles semblables pour affirmer

leur similitude ; certaines de ces conditions étant remplies, on peut conclure que les autres le sont et que les deux triangles sont semblables. Voici les cas principaux qui peuvent se présenter :

On peut affirmer que deux triangles sont *semblables ;*

1° *Quand ils sont équiangles ;*

2° *Quand ils ont les côtés homologues proportionnels ;*

3° *Quand ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ;*

4° *Quand ils ont les côtés parallèles, ou qu'ils les ont perpendiculaires, chacun à chacun.*

Théorème.

146. *Deux triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels et sont semblables.*

Soient les deux triangles ABC, DEF tels que l'angle A = D, B = E, C = F ; ces deux triangles sont semblables. Pour le démontrer, je prends sur AB une longueur AI = DE, et par le point I je mène IH parallèle à BC ; le triangle AIH est semblable à ABC (144) ; si je démontre que le triangle DEF est égal au triangle AIH, j'aurai démontré que DEF est semblable à ABC. Or, AI = DE par construction ; l'angle A = D par hypothèse ; l'angle I = B = E ; les triangles AIH, DEF ont un côté égal adjacent à deux angles égaux ; ils sont donc égaux ; DEF, comme AIH, est donc semblable à ABC.

On a

$$\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{IH};$$

ce qui revient à

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Remarques. *Si deux angles d'un triangle sont égaux chacun à deux angles d'un autre triangle, ces deux triangles sont équiangles et semblables.*

Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal sont semblables.

Théorème.

147. *Deux triangles qui ont les côtés proportionnels, ont les angles égaux, chacun à chacun, et sont semblables.*

Soient les deux triangles ABC, DEF (fig. précédente), tels que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (1); je dis que ces deux triangles sont semblables. Pour le démontrer, je prends sur AB une longueur AI = DE, et je mène IH parallèle à BC; j'obtiens ainsi un triangle AIH semblable à ABC. Or le triangle DEF = AIH; en effet, AIH étant semblable à ABC (144), on a

$$\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{IH} \quad (2).$$

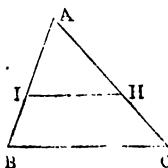
Comparant ces égalités aux égalités (1), je vois que AI étant égal à DE (par construction), $\frac{AB}{DE} = \frac{AB}{AI}$; tous les rapports (1), déjà égaux entre eux, sont égaux aux rapports (2); $\frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AH}$, donc DF = AH; $\frac{BC}{EF} = \frac{BC}{IH}$, donc EF = IH. Les deux triangles DEF, AIH ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux; DEF comme AIH est donc semblable à ABC.

$$A = D; \quad B = I = E; \quad C = H = F.$$

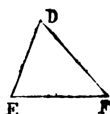
Théorème.

148. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables.*

Soient les deux triangles ABC, DEF tels que l'angle A = D et $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (1); ces triangles sont semblables.



Pour le démontrer, je prends sur AB une longueur AI = DE et je mène IH parallèle à BC; le triangle AIH est semblable à ABC (144); si je démontre que le triangle DEF est égal à AIH,



j'aurai démontré que DEF est semblable à ABC. Or, à cause de IH parallèle à BC, on a $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AH}$ (2); comparant cette égalité à l'égalité (1), je trouve que AI étant égal à DE (par construction), $\frac{AB}{AI} = \frac{AB}{DE}$; donc $\frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AH}$, d'où résulte $DF = AH$. On a déjà $DE = AI$, l'angle $D = A$; les deux triangles DEF, AIH sont donc égaux (1er cas, nº 29); le triangle DEF est donc semblable à ABC.

Voici un théorème qui se démontre comme le précédent :

Deux triangles rectangles sont semblables quand le rapport de leurs hypoténuses est égal à celui de deux autres côtés.

Théorème.

149. *Deux triangles sont semblables quand ils ont les côtés parallèles ou qu'ils les ont respectivement perpendiculaires.*

Soient A, B, C les angles de l'un de ces triangles; A', B', C' les angles de l'autre; A et A' ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires; de même B et B'; puis C et C'. Deux angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires (nos 60 et 61, livre I); nous avons donc :

(1)		(2)
$A = A'$	ou	$A + A' = 2$ droits,
$B = B'$	ou	$B + B' = 2$ droits,
$C = C'$	ou	$C + C' = 2$ droits.

Si l'une des égalités (2) n'est pas vraie, celle des égalités (1) qui est à côté doit l'être. Cela posé, les égalités (2) ne peuvent être vraies toutes trois; car, si cela était, la somme des angles des deux triangles vaudrait 6 droits; or, elle vaut justement 4 droits; donc au moins une des égalités (2) est fausse. Supposons que ce soit la première $A + A' = 2$ droits; alors $A = A'$; avec $A = A'$ on ne peut avoir $B + B' = 2$ droits; $C + C' = 2$ droits; puisque la somme des angles des deux triangles vaudrait 4 droits $+ A + A'$, ce qui est impossible; donc l'une au moins des deux dernières égalités (2)

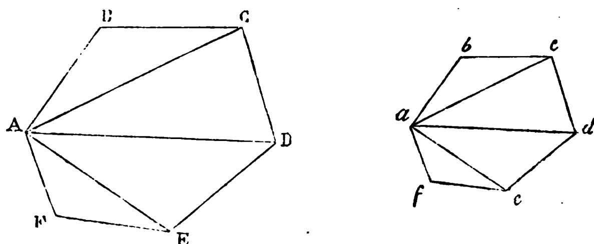
n'est pas vraie, par exemple : $B + B' = 2$ droits ; alors $B = B'$. Deux angles de ABC étant égaux, chacun à chacun, à deux angles de A'B'C', les autres angles C et C' sont égaux ; les triangles ABC, A'B'C' sont équiangles et par conséquent semblables (146).

Remarque. Avec $C = C'$, on pourrait avoir $C + C' = 2$ droits, alors C et C' seraient droits et les triangles seraient rectangles.

Théorème.

150. *Deux polygones semblables sont décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.*

Je décompose les deux polygones en un même nombre de triangles par des diagonales issues des sommets homologues A et *a*. Les



deux triangles ABC, *abc* ont l'angle $B = b$, et l'on a de plus $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$; ces deux triangles sont donc semblables (3e cas, n° 148). Considérons maintenant les triangles CAD, *cad* ; l'angle $ACD = acd$; en effet l'angle $BCD = bcd$ (angles homologues de 2 polygones semblables) ; l'angle $BCA = bca$ (angles homologues des triangles semblables ABC, *abc*) ; donc $BCD - BCA$ ou $ACD = bcd - bca$ ou acd ; de plus on a $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$ (similitude des polygones) ; $\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$ (similitude des triangles ABC, *abc*) ; de ces deux égalités on conclut $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$; les deux triangles CAD, *cad*, ayant un angle égal, $ACD = acd$, compris entre côtés proportionnels, sont semblables. On démontre exactement de la même manière que les triangles DAE, *dae* sont semblables ($DAE =$

CDE — ADC, et $dae = cde - ade$, etc), et ainsi de suite; on arrive aux derniers triangles AFE, *afe* qui sont dans le même cas que ABC et *abc*.

On peut choisir le sommet que l'on veut pour le joindre à tous les autres : donc, en général, *les diagonales homologues de deux polygones semblables sont proportionnelles aux côtés homologues.*

151. Réciproque. *Deux polygones* ABCDEF, *abcdef, décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, sont semblables.*

En effet, la décomposition ayant lieu comme sur notre figure, si on compare les angles des deux polygones, chacun à chacun, on les trouve deux à deux égaux entre eux, s'ils sont simples, $B = b$, $F = f$, ou composés d'angles égaux; donc $A = a$; $C = c$, etc.; ces polygones sont équiangles. Ensuite les triangles semblables étant comparés successivement et par ordre, on a

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{AD}{ad} = \frac{DE}{de}, \text{ etc.};$$

nos polygones déjà équiangles ont les côtés homologues proportionnels; ils sont donc semblables.

Théorème.

152. *Les périmètres de deux polygones semblables* ABCDEF, *abcdef, sont entre eux comme deux côtés homologues quelconques.*

En effet, on a, par définition, $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef}$ (fig. précéd.); d'où résulte, d'après un théorème d'arithmétique : $\frac{AB + BC + CD + DE + EF}{ab + bc + cd + de + ef} = \frac{AB}{ab}$, c'est-à-dire $\frac{\text{périm. ABCDEF}}{\text{périm. } abcdef} = \frac{AB}{ab}$, C. Q. F. D.

Théorème.

153. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse une perpendiculaire*, AD, *sur l'hypoténuse*; 1° *cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse*; 2° *chaque côté de l'angle droit est*

moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et le segment adjacent.

$$1^\circ\ \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC};\quad 2^\circ\ \frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD},\quad \text{et}\quad \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}.$$

Ces égalités résultent de la similitude des triangles BAD, DAC, BAC que nous allons démontrer. 1° Les triangles BAD, BAC sont semblables; en effet, ils sont tous deux rectangles, et ont l'angle aigu B commun; le troisième angle BAD, (1), du premier, est donc égal à l'angle C, (1), du second. 2° Les triangles DAC, BAC sont semblables, car ils sont tous deux rectangles et ont l'angle C commun; le troisième angle DAC, (2), du premier est égal au troisième angle B, (2), du second. 3° Enfin, les deux triangles BAD, DAC, rectangles en D, ont les angles (1) égaux entre eux, et (2), idem.

De la similitude des triangles BAD, DAC, en considérant les côtés homologues, on déduit l'égalité de rapports

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC} \qquad (1)$$

BD opposé à l'angle (1) du premier est à AD opposé à l'angle (1) du second, comme AD opposé à (2) du premier, est à DC opposé à (2) du second.

Les triangles semblables ABC, ABD, donnent de même

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}. \qquad (2)$$

BC hypoténuse du premier est à AB hypoténuse du second, comme AB du premier, opposé à l'angle (2), est à BD opposé à l'angle (1) du second.

Enfin, les triangles ABC, DAC donnent

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}. \qquad (3)$$

En réduisant au même dénominateur les rapports de chacune

des égalités précédentes, puis écrivant que les numérateurs sont égaux, on obtient ces égalités respectivement équivalentes :

$$\overline{AD}^2 = BD \times DC \qquad (4)$$

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD \qquad (5)$$

$$\overline{AC}^2 = BC \times DC \qquad (6).$$

Conformément à ce que nous avons dit dans les préliminaires (135), il faut dans ces dernières égalités regarder AD, BD, DC,... comme étant les nombres qui expriment les longueurs des lignes appelées sur la figure AD, BD, DC,... Ces égalités s'emploient préférablement quand on traite par le calcul des questions de géométrie. Comme chacune d'elles a lieu entre les *valeurs numériques* de trois lignes, elle peut servir à calculer l'une de ces valeurs numériques quand on connaît les trois autres (*).

Application. BD = 9 millimètres ; DC = 16 millim. Trouver AD, BC, AB, AC.

1° $BC = BD + DC = 25$ millimètres.

2° $\overline{AD}^2 = BD \times DC = 9 \times 16 = 144$; $AD = \sqrt{144} = 12$ millim.

3° $\overline{AB}^2 = BC \times BD = 25 \times 9 = 225$; $AB = \sqrt{225} = 15$ millim.

4° $\overline{AC}^2 = BC \times DC = 25 \times 16 = 400$; $AC = \sqrt{400} = 20$ millim.

La combinaison des égalités (4), (5), (6) conduit à d'autres relations utiles entre les *valeurs numériques* des mêmes lignes. Voici la plus remarquable :

Théorème.

154. Les trois côtés d'un triangle rectangle ayant été mesurés avec la même unité linéaire :

Le carré du nombre qui exprime l'hypoténuse est égal à la somme

---

(*) A ce point de vue chacune des égalités (4), (5), (6) est ce qu'on nomme en algèbre une formule. Les notations AD, BD, DC... représentent des nombres de la même manière que *a*, *b*, *c*... en algèbre. Les calculs que l'on fait pour établir les théorèmes suivants sont de véritables opérations algébriques.

des carrés des nombres qui expriment les carrés des côtés de l'angle droit.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \text{ (fig. précédente).}$$

J'abaisse du sommet A de l'angle droit, une perpendiculaire sur l'hypoténuse. D'après le théorème précédent, égalités (5) et (6), on a

$$BC \times BD = \overline{AB}^2$$
$$BC \times DC = \overline{AC}^2$$

En additionnant ces égalités, membre à membre, et mettant BC en facteur commun, on trouve

$$BC\,(BD + DC) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \quad (*)$$

laquelle, puisque $BD + DC = BC$, revient à

$$BC \times BC \text{ ou } \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad (7) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Faisons encore une application des formules (4), (5), (6), (7) :

Soient $AB = 3$ mètres ; $AC = 4$ mètres ; on demande les valeurs numériques de AB, BD, DC, BC.

1° $\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; $BC = \sqrt{25} = 5$ mètres. BC étant connu et AB donné, on déduit de l'égalité (5)

$$3^2 = 5 \times BD; \text{ d'où } BD = \frac{9}{5}.$$

De même l'égalité (3) donne

$$4^2 = 5 \times DC; \text{ d'où } DC = \frac{16}{5}.$$

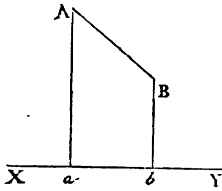
Enfin l'égalité (1) donne

$$\overline{AD}^2 = \frac{9}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{144}{25}; \; AD = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}.$$

Il existe aussi entre les valeurs numériques des côtés des triangles non rectangles des relations que nous allons faire connaître.

(*) En mettant par la pensée des nombres à la place de BD et DC, on comprend aisément ce calcul. Si par ex. AD et DC ont les valeurs précédentes, $BD = 9$ et $DC = 16$, en additionnant (5), (6) ci-dessus, on a $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 9$ fois $BC + 16$ fois BC; ce qui fait bien $BC \times (9 + 16)$.

Définition. On appelle ***projection*** d'une ligne AB sur une autre *xy*, la partie *ab* de cette dernière qui se trouve comprise entre les pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités de la ligne projetée.



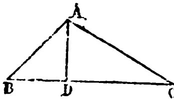
Dans la figure précédente, BD est la projection de AB sur BC, et DC la projection de AC. Un point tel que B qui est sur la ligne de projection, est lui-même sa projection.

Théorème.

155. *Le carré du côté d'un triangle opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés du triangle, moins deux fois le produit de l'un de ces derniers côtés par la projection de l'autre côté sur celui-là.*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD.$$

Il s'agit des nombres qui expriment les lignes indiquées, et des carrés de ces nombres (Prélimin., n° 135.)



Pour démontrer cette proposition, nous nous appuierons sur ce principe :

Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres, moins deux fois leur produit ;

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b.$$

Cela posé, j'observe que dans le triangle rectangle ADC, on a

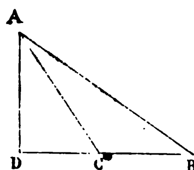
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 . \qquad (1)$$

Mais $DC = BC - BD$; donc $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BC \times BD$.
Remplaçant $\overline{DC}^2$ par cette valeur dans l'égalité (1), on trouve :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BC \times BD. \qquad (2)$$

Mais $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ (triangle rectangle BAD); si on remplace dans l'égalité (2), $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ par $\overline{AB}^2$, on obtient :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2BC \times BD. \quad \text{C. Q. F. D.}$$



Il peut arriver que la perpendiculaire tombe en dehors du triangle comme dans cette figure.

Si l'on y considère le côté AC opposé à un angle aigu B, on n'en aura pas moins

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DB.$$

En effet, le triangle rectangle ACB donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2. \quad (1)$$

Mais $DC = DB - BC$; donc $\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DB$.

On remplace $\overline{DC}^2$ par cette valeur dans (1), et on achève comme précédemment.

Théorème.

156. *Le carré du côté d'un triangle opposé à un angle* OBTUS *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,* PLUS *deux fois le produit de l'un de ces derniers côtés multiplié par la projection de l'autre côté sur celui-là.*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD \quad \text{(fig. précédente).}$$

(Il s'agit des nombres qui expriment les lignes indiquées et des carrés de ces nombres.)

Dans le triangle rectangle ABD, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2. \quad (1)$$

Mais $DB = DC + BC$; donc, d'après une proposition démontrée en arithmétique (*), $\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 + 2DC \times BC$.

(*) *Le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus le carré du second, plus deux fois le produit du premier par le second:* $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \times b$.

En remplaçant $\overline{DB}^2$ par cette valeur dans (1), on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^3 + \overline{BC}^2 + 2BC \times DC. \qquad (2)$$

Mais $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$ (triangle rectangle ADC); en remplaçant $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ par $\overline{AC}^2$, on a enfin

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE. Chacune des égalités qui concerne les côtés d'un triangle *non rectangle* comprend les valeurs numériques de quatre lignes; de sorte que chacune de ces égalités, prise isolément, ne peut donner une de ces valeurs que si on connaît les trois autres.

Des trois derniers théorèmes résulte le principe suivant :

Suivant que le carré du nombre qui exprime le plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés qui expriment les deux autres côtés, ou plus petit, ou plus grand que cette somme, le plus grand angle du triangle est droit, aigu ou obtus.

1ᵉʳ EXEMPLE. Les côtés d'un triangle sont 5 mètres, 3 mètres, 4 mètres.

$$5^2 = 25; \quad 3^2 = 9; \quad 4^2 = 16; \quad 25 = 9 + 16.$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Ce triangle est rectangle. Autrement, le carré de son plus grand côté serait plus petit ou plus grand que la somme des carrés des deux autres côtés (nᵒˢ 155 et 156).

Un triangle dont les côtés sont entre eux comme 3, 4, 5, est rectangle.

En effet, ce triangle est semblable à un triangle dont les côtés auraient des longueurs respectivement égales à 3, 4, 5.

2ᵉ EXEMPLE. *Les trois côtés d'un triangle sont :* 5^m, 7^m, 8^m.

$$8^2 = 64; \quad 7^2 = 49; \quad 5^2 = 25; \quad 64 < 25 + 49.$$
$$8^2 < 7^2 + 5^2.$$

Le plus grand angle de ce triangle est aigu. Car s'il était droit, on devrait avoir $8^2 = 7^2 + 5^2$; s'il était obtus, on devrait avoir $8^2 > 7^2 + 5^2$.

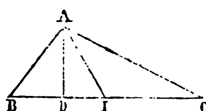
3ᵉ EXEMPLE. Les côtés d'un triangle sont 5^m, 7^m, 10^m.

$$10^2 = 100; \quad 5^2 = 25; \quad 7^2 = 49; \quad 100 > 25 + 49.$$
$$10^2 > 5^2 + 7^2.$$

Le plus grand angle de ce triangle est *obtus*.

Théorème.

Si on joint le sommet A *d'un triangle* ABC *au milieu* I, *du côté opposé* BC, *on a entre les carrés des nombres qui expriment les côtés et la* MÉDIANE AI, *la relation suivante:*



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{BI}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2.$$

En effet, dans le triangle AIB, l'angle I étant aigu, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 - 2BI \times ID \qquad (1)\ (\text{n}^\circ\ 155).$$

L'angle I du triangle AIC étant obtus, on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IC}^2 + 2IC \times ID \qquad (2).$$

Ajoutant ces égalités, membre à membre, on trouve, en ayant égard à ce que $BI = IC$,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{BI}^2.$$

On déduit facilement de ce théorème que :

La somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales.

En général, *la somme des carrés des quatre côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux des diagonales.*

Nous laissons ces deux théorèmes à démontrer.

Voici de nouvelles formules qui ont lieu également entre quatre lignes, mais qui concernent les sécantes et tangentes d'un cercle.

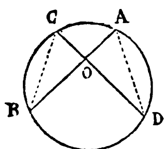
Théorème.

Si d'un point pris dans l'intérieur d'un cercle on mène des sécantes au cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante;

c'est-à-dire que ce produit reste le même quand on passe d'une sécante à une autre quelconque.

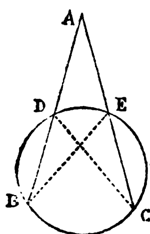
158. 1° *Le point donné* O *peut être dans le cercle.*

AB, CD étant des sécantes quelconques, on a $OB \times OA = OC \times OD$. Pour le démontrer, je mène CB, AD; les triangles AOD, COB ont les angles en O égaux, l'angle A = l'angle C (même mesure, $\frac{1}{2}$ BD); B = D (même mesure, $\frac{1}{2}$ AC); ces triangles sont donc semblables. En comparant les côtés homologues, on trouve $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA}$; en réduisant ces rapports au même dénominateur, on trouve les numérateurs égaux $OB \times OA = OC \times OD$. C. Q. F. D.



2° *Le point donné peut être hors de cercle.*

AB, AC étant des sécantes quelconques, on a $AB \times AD = AC \times AE$. Pour le démontrer, je mène les lignes CD, EB; les triangles ABE, ADC ont l'angle A commun; l'angle B = l'angle C (même mesure, $\frac{1}{2}$ DE); ils sont donc semblables. En comparant leurs côtés homologues, on trouve $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$; d'où, en réduisant au même dénominateur, on déduit $AB \times AD = AC \times AE$. C. Q. F. D.



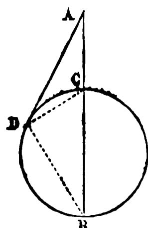
3° *L'une des sécantes peut devenir tangente.*

Soient la sécante AB et la tangente AD issues du même point A; dans ce cas les deux points de rencontre d'une des sécantes et du cercle s'étant confondus en un seul, les deux distances du point A à la circonférence comptées sur cette sécante sont devenues égales; leur produit devient le carré de la tangente, de sorte que l'on doit avoir $\overline{AD}^2 = AB \times AC$.

Le carré de la tangente est égal au produit de la sécante par sa partie extérieure.

Autrement dit : une tangente et une sécante partant du même point, *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière* AB *et sa partie extérieure* AC.

Pour le démontrer, je mène CD, DB; ce qui donne deux triangles ADC, ADB, semblables comme ayant l'angle A commun, et l'angle ADC = l'angle B (même mesure $\frac{1}{2}$ CD); en comparant les côtés homologues de ces triangles, on trouve $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$; d'où on déduit $AB \times AC = \overline{AD}^2$.



Les deux théorèmes précédents, 1° et 2°, s'énoncent quelquefois ainsi :

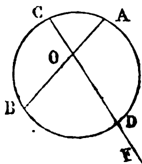
1° *Deux cordes qui se coupent dans le cercle se divisent en parties réciproquement proportionnelles.*

2° *Si deux sécantes se rencontrent hors d'un cercle, les sécantes entières sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

Ces derniers énoncés se fondent sur la définition suivante qui appartient à l'arithmétique : *Deux nombres* a *et* b *sont réciproquement proportionnels à deux autres*, c *et* d, *quand le produit des deux premiers est égal au produit des deux derniers*, $a \times b = c \times d$.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies, et il est quelquefois utile de les invoquer.

Ex. : *Étant données deux droites* AB, CD *qui se coupent, si le produit des distances du point d'intersection* O, *à deux autres points* A *et* B *de l'une des droites est égal au produit des distances du même point à deux points* C, D *de la seconde ligne*, $AO \times OB = OC \times OD$, *les quatre extrémités* A, B, C, D *en question sont sur une même circonférence.*



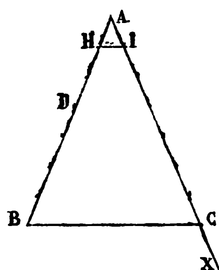
En effet, on peut toujours, par trois de ces points A, B, C, faire passer une circonférence; supposons-la construite; elle doit passer au point D; en effet, si le deuxième point de rencontre de la circonférence avec CD était F, on aurait $AO \times OB = OC \times OF$, mais on a déjà $OA \times OB = OC \times OD$; on aurait donc $OC \times OF = OC \times OD$, d'où $OD = OF$; la partie égale au tout; ce qui est absurde. On arrive à une absurdité en supposant que la circonférence qui passe par A, B, C ne passe pas par D; donc elle passe en ce point D.

On démontre de la même manière les deux autres réciproques.

Problème.

159. *Diviser une ligne donnée* AB *en un nombre quelconque de parties égales.*

Supposons qu'on veuille la diviser en sept parties égales. Par le point A on mène une ligne indéfinie, AX, sous un angle quelconque. Sur cette ligne AX, on porte, à partir de A, sept longueurs égales entre elles, dont la première, AI, est prise quelconque, ni trop petite, ni trop grande. On joint le point C, extrémité de la dernière de ces longueurs, au point B; on mène par le point I une parallèle à BC; soit IH. La ligne AH est la septième partie de AB; car $\frac{AH}{AB}=\frac{AI}{AC}$ et AI est la septième partie de AC. On achève en portant consécutivement sur AB, avec le compas, sept longueurs égales à AH et marquant leurs extrémités.

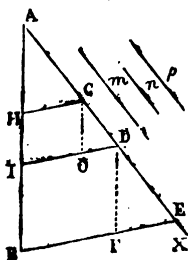


Pour prendre une fraction donnée d'une ligne donnée AB, par exemple, les $\frac{3}{7}$, il suffit d'en prendre le septième, comme tout à l'heure AH, et de porter trois fois cette longueur jusqu'au point D, $AD = \frac{3}{7}AB$.

Problème.

160. *Partager une ligne* AB *en parties proportionnelles à trois lignes données* m, n, p.

Je mène par le point A une seconde droite AX, sous un angle quelconque; je porte sur AX à partir de A, et à la suite les unes des autres des longueurs $AC=m$, $CD=n$, $DE=p$; je joins la dernière extrémité E au point B; puis par chacun des points D et C je mène une parallèle à BE; les deux parallèles ainsi menées DI, CH divisent AB de la manière demandée:



$$\frac{AH}{AC}=\frac{IH}{CD}=\frac{IB}{DE}.$$

En effet, si on mène les parallèles CO, DF à AB, on forme des triangles semblables au triangle AHC. En égalant les rapports des côtés homologues, on a justement les égalités précédentes ($CO = IH$, $DF = IB$).

Il est aussi facile de diviser une ligne en parties proportionnelles à des nombres donnés, 5, 3, 4, par exemple.

Pour céla ayant tiré une seconde ligne AX, on prend une longueur arbitraire AM, par exemple, que l'on porte cinq fois sur AX à partir de A; supposons qu'on arrive ainsi au point C; à partir de C en continuant, on porte encore 3 fois AM jusqu'en D; puis encore 4 AM jusqu'en E; on joint BE, puis on mène les parallèles DI, CH; AB est divisé en parties proportionnelles à $AC = 5$, $CD = 3$, et $DE = 4$ (AM servant d'unité).

Problème.

161. *Trouver une quatrième proportionnelle à 3 lignes données* m, n, p.

C'est-à-dire qu'il faut trouver une quatrième ligne x, telle que l'on ait l'égalité de rapports $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$.

Je tire deux lignes indéfinies AX, AY; sur la première je prends à partir de A, et à la suite l'une de l'autre les longueurs $AB = m$, $BC = n$; puis sur AY, $AD = p$; je mène BD; puis par le point C je mène CE parallèle à BD; la ligne DE répond à la question. En effet, la ligne BD étant parallèle à CE, on a (n° 137), $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$, ou $\frac{m}{n} = \frac{p}{DE}$; donc DE répond à la question.

On pourrait prendre les longueurs m et n, toutes deux partant de A; par ex. : $AC = m$, $AB = n$; alors la longueur cherchée x, serait AE et non DE. Les deux dernières lignes données peuvent être égales; on dit alors qu'il faut trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données m, n; traduisez : trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes m, n, n; la construction est la même.

Remarque. Rappelons-nous qu'on doit chercher une quatrième proportionnelle aux lignes m, n, p, quand il faut avoir une ligne x telle que $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$, ou bien $m \times x = n \times p$, ou bien encore $m = \frac{n \times p}{x}$; car ces trois égalités sont équivalentes.

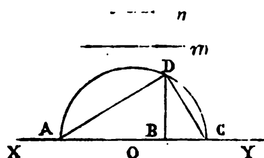
Problème.

162. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* m, n.

Il s'agit de trouver une ligne x telle que $\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$, ou bien telle que $m \times n = x^2$, ou $x = \sqrt{m \times n}$.

On peut donner de ce problème diverses solutions fondées sur les théorèmes précédents dans l'énoncé desquels il est question de moyenne proportionnelle.

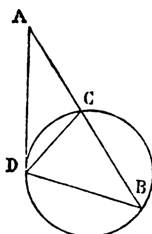
Première solution. Sur une droite indéfinie on prend une longueur $AB = m$, puis $BC = n$; on construit, sur la ligne AC comme diamètre, une demi-circonférence; on élève au point B, sur AC, une perpendiculaire BD terminée à la circonférence; BD est la moyenne proportionnelle demandée.



En effet, si on tire AD, DC, on forme un triangle ADC, rectangle en D (n° 110). Dans ce triangle ADC, la perpendiculaire DB abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, est moyenne géométrique entre les segments $AB = m$ et $BC = n$ (n° 153, 1°). C. Q. F. D.

Deuxième solution. Sur la ligne indéfinie XY on prend, à partir du même point A, successivement, $AC = m$, $AB = n$; sur AC, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence; au point B on élève sur AC la perpendiculaire BD, terminée à la circonférence; on tire AD; AD est la moyenne proportionnelle entre $AC = m$ et $AB = n$. En effet, dans le triangle rectangle ADC, un côté de l'angle droit, AD, est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière AC, et le segment adjacent AB (153, 2°).

TROISIÈME SOLUTION. Sur une ligne indéfinie on prend, à partir du même point A, successivement AB $= m$, puis AC $= n$; sur CB $=$ AB $-$ AC, comme corde, on décrit une circonférence; du point A on mène une tangente, AD, à cette circonférence; AD est la moyenne proportionnelle cherchée.



En effet, on a vu (nº 158, 3º) que $\overline{AD}^2 = AB \times AC = m \times n$.

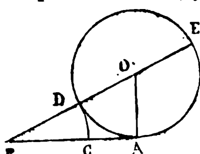
Problème.

163. *Partager une ligne donnée* AB *en moyenne et extrême raison.*

Partager une ligne AB *en moyenne et extrême raison, c'est la diviser en deux parties* AC, CB, *telles que la plus grande partie* BC *soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière* AB *et l'autre partie* AC;

On doit avoir $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$.

Au point A sur AB, j'élève une perpendiculaire AO que je prends égale à la moitié de AB; du point O comme centre avec le rayon OA, je décris une circonférence; je mène par le point B et par le centre, la sécante BDE; puis je prends BC $=$ BD, au moyen de l'arc de cercle DC; la ligne AB est divisée au point C en moyenne et extrême raison.



En effet, la sécante DE et la tangente BA étant issues du même point, on a (nº 158, 3º), $\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BD}$. Retranchant 1 des deux membres, il vient $\frac{BE}{BA} - 1 = \frac{BA}{BD} - 1$, ou $\frac{BE - BA}{BA} = \frac{BA - BD}{BD}$; or BE $-$ BA $=$ BE $-$ DE $=$ BD; BA $-$ BD $=$ BA $-$ BC $=$ CA; la dernière égalité n'est donc autre que celle-ci : $\frac{BD}{BA} = \frac{CA}{BD}$, de laquelle on déduit $\frac{BA}{BD} = \frac{BD}{CA}$; BC $=$ BD est donc une moyenne proportionnelle entre BA et CA.

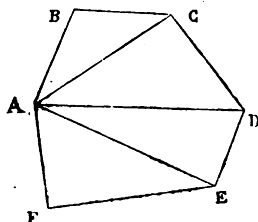
REMARQUE. Soit la ligne donnée AB $= a$; alors AO $= \frac{1}{2}a$. Dans le triangle rectangle AOB, on a $\overline{BO}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AO}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$; donc BO $= \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Mais BC $=$ BD $=$ BO $-$ OD $= \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

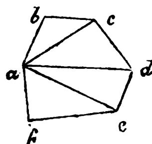
Le plus grand segment d'une ligne a, divisée en moyenne et extrême raison, est égal à $\frac{1}{2}a(\sqrt{5} \quad 1)$.

Problème.

164. *Construire sur une droite donnée un polygone semblable à un polygone donné.*

Sur la ligne *ab* donnée comme côté homologue à AB, il faut construire un polygone semblable au polygone donné ABCDEF.





Pour cela, je décompose ABCDEF en triangles par des diagonales issues du même sommet A; puis avec *ab* au point *b*, je fais un angle égal à l'angle B, et au point *a* un angle *bac* égal à l'angle BAC; les deux lignes menées ainsi l'une de *b*, l'autre de *a*, se rencontrent en *c*, et forment avec *ab* un triangle *abc* équiangle et semblable à ABC.

Maintenant avec *ac* au point *a* je fais un angle *cad* égal à CAD, et au point *c* un angle *acd* = ACD; les deux nouvelles lignes ainsi menées se rencontrent en *d*, et forment avec *ac* le triangle *acd* équiangle et semblable au triangle ACD; puis sur *ad* je construis de même un triangle *ade* équiangle à ADE, et enfin sur *ae* un triangle *aef* équiangle au triangle AEF.

Le polygone propre *abcdef* est semblable au polygone proposé ABCDEF (n° 151).

Problème.

165. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et dont le périmètre* p *soit les* $\frac{5}{7}$ *du périmètre* P *de ce polygone donné.*

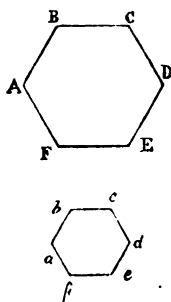
Supposons que le polygone donné soit ABCDEF (fig. précédente). Puisque le rapport des périmètres est le même que celui de deux côtés homologues quelconques (n° 152), si l'on appelle *ab*

le côté du nouveau polygone homologue à AB, comme $\frac{p}{P}=\frac{5}{7}$, on devra avoir $\frac{ab}{AB}=\frac{5}{7}$, ou $ab=\frac{5}{7}$ AB. On construira donc une ligne *ab* égale aux $\frac{5}{7}$ de AB (nº 159); puis sur *ab*, comme côté homologue à AB, on construira un polygone semblable à ABCDEF (nº 164).

POLYGONES RÉGULIERS.

166. Définition. *On appelle polygone régulier un polygone qui a ses côtés égaux et ses angles égaux.*

167. *Deux polygones réguliers du même nombre de côtés sont deux figures semblables.* En effet, 1º les côtés homologues sont proportionnels, puisque, évidemment $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd},\ldots$ (numérateurs égaux, dénominateurs égaux); 2º l'angle $A=a$. En effet, la somme des angles de chaque polygone (nous considérons ici deux hexagones réguliers) est $(6-2)$ 2 droits $=4$ fois 2 droits $=$ 8 droits, et chaque angle de l'un ou de l'autre est égal à $\frac{8^{\text{droits}}}{6}$.



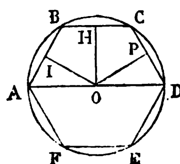
Théorème.

168. *A tout polygone régulier on peut circonscrire et inscrire une circonférence.*

1º *On peut circonscrire une circonférence ;*

Soit ABCDEF un polygone régulier quelconque.

Par trois sommets consécutifs A, B, C, je fais passer une circonférence; pour cela, comme on sait, il suffit d'élever au milieu de AB, et au milieu de BC, deux perpendiculaires qui se rencontrent en O; puis de décrire une circonférence du point O comme centre avec le rayon OA; cela fait, je dis que cette circonférence passera nécessairement par le point D et par tous les autres sommets du polygone.

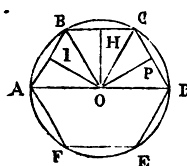


Pour le démontrer, je tire OD, puis considérant la perpendiculaire OH au milieu de BC, je fais tourner le quadrilatère OHCD autour de OH comme charnière jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le quadrilatère OHBA; les angles en H étant égaux comme droits, le côté HC s'appliquera sur HB, et comme HC = HB, le point C tombera en B; mais alors l'angle HCD étant égal à HBA (égalité des angles du polygone régulier), la ligne CD s'appliquera sur BA, et comme CD = BA, le point D tombera en A; comme d'ailleurs le point O n'a pas bougé, il se trouve que OD coïncide exactement avec OA; donc OD = OA. La circonférence décrite de O comme centre avec le rayon OA passe donc au point D. La considérant comme passant par B, C, D, on prouvera de même qu'elle passe en E; et ainsi de suite. Cette circonférence passe donc par tous les sommets du polygone; elle est circonscrite à ce polygone.

C'est la seule qu'on puisse circonscrire, puisque le polygone a au moins trois sommets, et que par trois points non en ligne droite, on ne peut faire passer qu'une circonférence.

2° *On peut inscrire une circonférence.*

Pour cela, on observe que les côtés AB, BA, CD,... du polygone étant des cordes égales de cercle OA, sont également distants du centre O; OI = OH = OC, etc. Si donc du point O comme centre avec un rayon égal à OH, on décrit une circonférence, cette courbe passera par les points I, H, P,... et y sera tangente aux côtés du polygone, puisque ceux-ci sont perpendiculaires à ses rayons OI, OH, etc.



Cette circonférence sera donc inscrite au polygone.

On ne peut inscrire que cette circonférence.

En effet, le centre de toute circonférence inscrite devant être également distant des côtés AB, BC du polygone, devra se trouver sur la bissectrice de l'angle ABC (48); ce même centre devant être également distant des côtés BC, CD, se trouve aussi sur la bissectrice de l'angle BCD; ce centre doit donc se trouver à la rencontre des deux bissectrices; celles-ci n'ayant qu'un point commun, il n'y a qu'un centre O, un rayon OI, et par suite une seule circonférence inscrite.

Remarque. Le centre de la circonférence circonscrite et le centre de la circonférence inscrite à un polygone régulier sont un seul et même point O; ce point s'appelle le *centre* du polygone.

Les lignes qui vont du centre à tous les sommets du polygone sont les *bissectrices* de ses angles.

Chacun des angles AOB, BOC, etc... est dit un angle *au centre* du polygone; tous ces angles sont égaux.

Il y a autant de ces angles au centre que de côtés dans le polygone; leur somme est égale à 4 droits. Chacun d'eux a donc pour valeur 4 droits divisés par le nombre des côtés du polygone, $\frac{4^{\text{droits}}}{n}$.

S'il s'agit, par exemple, d'un hexagone régulier, l'angle au centre est égal à $\frac{4^{\text{droits}}}{6} = \frac{2}{3}$ droit.

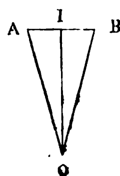
Réciproquement, connaissant la valeur d'un angle au centre, on peut en conclure le nombre des côtés du polygone. Ex. : l'angle au centre d'un polygone régulier est de 45°; quel est le nombre de côtés? 4 droits $= 360°$; on écrira $\frac{360°}{n} = 45°$; $\frac{360}{n} = 45$; d'où $360 = 45n$ et $n = \frac{360}{45} = 8$.

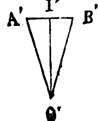
Théorème.

Les périmètres des deux polygones réguliers du même nombre de côtés sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits ou des cercles inscrits.

Soient AB, A'B' deux côtés des polygones donnés, O et O' leurs centres. OA, O'A' sont les rayons des cercles circonscrits; OI, O'I' les rayons circonscrits.

Les triangles isocèles OAB, O'A'B' sont semblables; car l'angle O et l'angle O' sont la même partie aliquote de quatre droits $\left(\frac{4 \text{ droits}}{n}\right.$, si n est le nombre des côtés de chaque polygone$\left.\right)$; $O = O'$ et l'on a évidemment $\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'}$. Ces triangles étant semblables, on a l'égalité de rapports $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'A'}$; $\frac{n.AB}{n.A'B'}$ ou $\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$; donc $\frac{P}{P'} = \frac{OA}{O'A'}$. *Les périmètres des deux polygones sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits.*





En second lieu, les triangles rectangles OAI, O'A'I' qui ont l'angle aigu $A = A'$ sont semblables. On a donc

$$\frac{AI}{A'I'} = \frac{OI}{O'I'}; \quad \text{d'où} \quad \frac{2AI}{2A'I'} = \frac{OI}{O'I'},$$

c'est-à-dire

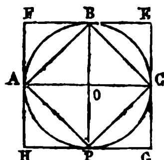
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OI}{O'I'};$$

mais $\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$; donc $\frac{P}{P'} = \frac{OI}{O'I'}$. *Les périmètres sont entre eux comme les rayons des cercles inscrits.*

Problème.

169. *Inscrire un carré dans un cercle.*

On mène deux diamètres, AC, BP, qui se coupent à angles droits; on joint leurs extrémités par les droites AB, BC,... le quadrilatère inscrit ABCP est un carré. En effet, ses côtés sont des cordes d'arcs égaux, et chacun de ses angles, ex. : BAP, est droit, comme inscrit dans un demi-cercle.



On obtient un carré circonscrit, FEGH, en menant des tangentes aux extrémités des diamètres AC, BP. En effet, chaque côté du quadrilatère obtenu est égal au diamètre opposé, et ses angles sont évidemment droits.

170. Il existe entre la valeur numérique du rayon R et celle du côté du carré inscrit, que nous appellerons c, une relation remarquable. Dans le triangle rectangle AOB, $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$; autrement dit : $c^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$; d'où $c = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$.

Si le rayon est l'unité linéaire, si $R = 1$, $c = \sqrt{2}$.

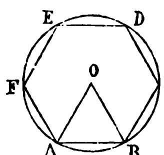
Connaissant la valeur de R, en général, on aura celle de c en évaluant $\sqrt{2}$ avec une approximation plus ou moins grande, et multipliant la valeur de R par le résultat.

Quant au côté du carré circonscrit, il est précisément égal au diamètre; $C = 2R$.

Problème.

171. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.*

A l'aide d'un compas, on inscrit consécutivement six cordes, AB, BC, CD,... égales au rayon ; on revient ainsi au point de départ ; ABCDEF est un hexagone régulier.

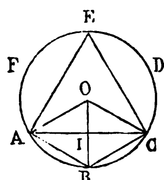


On est conduit à cette construction par le raisonnement qui suit :

Supposons le problème résolu, et soit AB le côté de l'hexagone régulier inscrit : menons les rayons AO, OB ; l'angle au centre $AOB = \frac{4^{\text{droits}}}{6} = \frac{2}{3}$ droit. La somme des deux autres angles A et B, du triangle *isocèle* AOB, vaut 2 droits $- \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ droit. $A + B$ ou $2A = \frac{4}{3}$ d. ; donc $A = B = \frac{2}{3}$ droit ; donc $O = A = B$. Le triangle OAB est équiangle, et par suite équilatéral, $AB = AO$. C. Q. F. D.

Le côté de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon $C = R$.

172. *Triangle équilatéral*. Pour inscrire un triangle équilatéral, on marque sur la circonférence les extrémités de six cordes égales au rayon ; mais on ne joint les points marqués que de 2 en 2, AC, CE, EA ; on obtient ainsi un triangle équilatéral ACE.



En effet, l'arc $AB = BC = \frac{1}{6}$ de la circonférence ; donc l'arc $ACB = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de la circonférence.

De la valeur numérique du rayon, on déduit aisément la longueur du côté du triangle équilatéral inscrit : $AC = R\sqrt{3}$.

Pour le démontrer, on mène OA, OB, OC, AB, BC. La figure OABC est un losange ; les diagonales OB, AC se coupent donc en deux parties égales et à angles droits. Le triangle rectangle AOI

donne $\overline{AO}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{OI}^2$; c'est-à-dire $R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$, ou $R^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{\overline{AC}^2}{4}$. Multipliant de part et d'autre par 4, on trouve $4R^2 = R^2 + \overline{AC}^2$, d'où enfin $\overline{AC}^2 = 3R^2$ et $AC = R\sqrt{3}$.

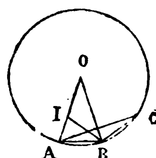
On obtient la valeur numérique du côté du triangle équilatéral inscrit en multipliant la valeur du rayon par $\sqrt{3}$.

On évalue $\sqrt{3}$ en décimales avec l'approximation que comporte la question. Si $A = 1$, $AC = \sqrt{3}$. Le côté du triangle équilatéral inscrit et le rayon n'ont pas de mesure commune.

Problème.

172 (*bis*). *Inscrire un décagone régulier dans un cercle.*

Supposons le problème résolu et soit AB le côté du décagone régulier inscrit. L'angle au centre $O = \frac{4}{10}d = \frac{2}{5}d$. Les deux angles, à la base A et B du triangle isocèle OAB, valent ensemble $2^{dr} - O = 2^{dr} - \frac{2}{5}d = \frac{8}{5}dr$. donc $A = B = \frac{4}{5}dr$; B est double de O; je divise cet angle B en deux parties égales par la ligne BI; l'angle OBI = O et le triangle OIB est isocèle; OI = IB. Dans le triangle AIB, nous avons $IBA = \frac{2}{5}$, $A = \frac{4}{5}$; donc $AIB = 2_{dr} - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}dr = A$; le triangle AIB est isocèle et AB = IB; donc AB = OI. Cela posé, observons que BI étant bissectrice de l'angle B du triangle OBA, on a (n° 140) l'égalité de rapports $\frac{OB}{AB} = \frac{OI}{IA}$, qui revient à $\frac{OA}{OI} = \frac{OI}{IA}$, à cause de OB = OA, AB = OI. La ligne OI, égale au côté AB du décagone régulier inscrit, est donc le plus grand segment du rayon OA divisé en moyenne et extrême raison.



Pour inscrire un décagone régulier dans un cercle, il suffit de diviser le rayon en moyenne et extrême raison, puis de porter le plus grand segment dix fois sur la circonférence; on revient au point de départ.

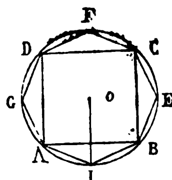
Ayant inscrit le décagone régulier, si l'on joint ses sommets de deux en deux, on obtient le pentagone régulier inscrit. On construit aisément les polygones inscrits de 20, 40, 80..... côtés (n° 173).

Problème.

173. *Un polygone régulier étant inscrit, inscrire un polygone régulier d'un nombre double de côtés.*

On divise en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus par les côtés du polygone donné, puis on joint chaque point de division aux deux sommets voisins.

Un carré ABCD étant inscrit dans un cercle, on obtient par cette construction l'octogone inscrit; puis successivement les polygones de 16, 32, 64..... côtés.

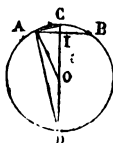


Ayant inscrit un hexagone régulier, on peut obtenir successivement les polygones inscrits de 12, 24, 48..... côtés.

Problème.

174. *Connaissant la valeur numérique du côté d'un polygone régulier inscrit et le rayon du cercle,* calculer *le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double.*

Soit AB le côté d'un polygone régulier inscrit; abaissons la perpendiculaire OC, et tirons AC; AC est le côté du polygone inscrit d'un nombre de côtés double. Désignons par c la valeur numérique de AB, par R celle du rayon, et x celle de AC.



Prolongeons CO jusqu'à la circonférence D, et tirons AD; le triangle ADC est rectangle, et AI est perpendiculaire à l'hypoténuse. Le côté $AC = x$ est moyen proportionnel entre l'hypoténuse $DC = 2R$ et le segment adjacent CI:

$$\overline{AC}^2 = DC \times CI \quad \text{ou} \quad x^2 = 2R \times CI. \qquad (1)$$

$$\text{Mais } CI = OC - OI = R - OI = R - \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2}; \qquad (2)$$

$$\text{car } \overline{OI}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AI}^2 = R^2 - \overline{AI}^2; \text{ d'où } OI = \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2}.$$

$$\text{Or } AI = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}; \ \overline{AI}^2 = \frac{c^2}{4}; \ R^2 - \overline{AI}^2 = R^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4R^2 - c^2}{4}.$$

Donc

$$CI = R - \sqrt{\frac{4R^2 - c^2}{4}} = R - \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{2} = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - c^2}}{2}.$$

En remplaçant CI par cette valeur dans l'égalité (1), on trouve :

$$x^2 = \frac{2R(2R - \sqrt{4R^2 - c^2})}{2} = R(2R - \sqrt{4R^2 - c^2});$$

d'où

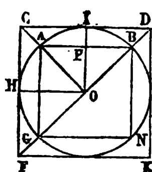
$$x = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - c^2})}. \qquad (a)$$

A l'aide de cette formule, on peut, connaissant le périmètre d'un polygône régulier de n côtés, *calculer* le périmètre $2nx$ du polygone inscrit d'un nombre double de côtés.

Problème.

175. *Un polygone régulier étant inscrit dans une circonférence, circonscrire un polygone régulier semblable.*

On mène un rayon, OI, perpendiculaire à chaque côté du polygone inscrit, et à l'extrémité, I, de chaque rayon une tangente à la circonférence; les tangentes ainsi menées forment un polygone régulier circonscrit semblable au polygone inscrit donné.



En effet, d'abord les angles du polygone circonscrit sont égaux à ceux du polygone inscrit; car, comparés deux à deux, ces angles ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Ex. : BAG, DCF.

En second lieu, les côtés homologues des deux polygones sont proportionnels; pour le démontrer, nous allons faire voir d'abord que les sommets des deux polygones sont deux à deux en ligne droite avec le centre O de la circonférence; par exemple, O, A, C sont en ligne droite. En effet, les deux triangles rectangles OIC, OHC ont l'hypoténuse OC commune; les côtés OI, OH égaux comme rayons; ces deux triangles étant égaux, l'angle COI = COH; la ligne CO divise l'angle IOH en deux parties égales; elle doit donc passer au milieu A de l'arc IH qui mesure IOH; les points O, A, C sont donc en ligne droite. Cela posé, les deux triangles AOB, COD sont semblables (équiangles) et donnent $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$; de même les triangles semblables OAG, OCF donnent $\frac{AG}{CF} = \frac{OA}{OC}$; de ces deux égalités résulte celle-ci : $\frac{AB}{CD} = \frac{AG}{CF}$; on trouverait de même $\frac{AG}{CF} = \frac{GN}{FK}$; etc. Les deux polygones sont équiangles et ont les côtés

proportionnels ; ils sont donc semblables. Le polygone inscrit est régulier, l'autre l'est aussi.

Problème.

176. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, trouver le côté d'un polygone circonscrit semblable.*

Il faut trouver CD (figure précédente), connaissant AB et OI.

Soient $CD = x$, $AB = C$, $OI = R$.

Les triangles semblables OAP, OCI donnent l'égalité

$$\frac{CI}{AP} = \frac{OI}{OP};\ \frac{2CI}{2AP} = \frac{OI}{OP} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{C} = \frac{R}{OP};\ \text{d'où} \quad x = \frac{C \times R}{OP}.$$

Mais $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2 = R^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{C^2}{4} = \frac{4R^2 - C^2}{4}$;

donc

$$OP = \frac{\sqrt{4R^2 - C^2}}{2}. \qquad (b)$$

Remplaçant OP par cette valeur, et effectuant la division, on trouve :

$$x = \frac{2C \times R}{\sqrt{4R^2 - C^2}}. \qquad (2)$$

MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE.

177. Si on inscrit successivement dans un cercle une série de polygones dont le nombre des côtés va constamment en se doublant, par exemple des polygones réguliers de 4, 8, 16, 32..... côtés (*V.* la 1[re] figure, page 110), on voit : 1° que chaque périmètre ainsi tracé est moindre que la circonférence ; 2° que ces périmètres, qui vont en augmentant avec le nombre des côtés des polygones, se rapprochent de plus en plus de la longueur de la circonférence, dont ils finissent par différer infiniment peu.

On admet comme évident que si le nombre des côtés d'un de ces polygones était suffisamment grand, la différence entre son périmètre et la longueur de la circonférence serait moindre que toute quantité donnée. Autrement dit :

DÉFINITION. *La longueur de la circonférence est la limite dont*

s'approchent indéfiniment, jusqu'à en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée, les périmètres des polygones inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits (*).

D'après cela, et pour plus de simplicité, on considère, dans les applications *numériques*, la longueur de la circonférence comme le périmètre d'un polygone inscrit d'un très-grand nombre de côtés infiniment petits, et on lui attribue les propriétés qui appartiennent à tous les périmètres des polygones inscrits, indépendamment du nombre de leurs côtés.

Il nous faut maintenant apprendre à calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné. Pour cela, on se fonde sur ce principe fondamental :

Théorème.

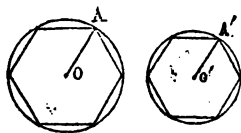
178. *Le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.*

En d'autres termes :

Le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même que celui d'une autre circonférence quelconque à son diamètre.

$$\frac{\text{circ. OA}}{2\text{OA}} = \frac{\text{circ. O'A'}}{2\text{O'A'}},$$ quels que soient les rayons OA, O'A'.

Pour le démontrer, inscrivons dans les deux circonférences deux polygones réguliers du même nombre de côtés. Les périmètres P, P' de ces polygones sont entre eux dans le même rapport que les rayons OA, O'A' des cercles circonscrits: $\frac{P}{P'} = \frac{OA}{O'A'}$.



Cette proposition est vraie, quel que soit le nombre des côtés des polygones inscrits; elle ne cesse pas d'être vraie quand, le nombre des côtés de ces polygones devenant infiniment grand, on arrive

(*) Voyez en arithmétique ce qu'on nomme limite d'une série de grandeurs variables.

aux limites de leurs périmètres, c'est-à-dire aux circonférences.

On a donc : $\dfrac{\text{circ. OA}}{\text{circ. O'A'}} = \dfrac{\text{OA}}{\text{O'A'}}$, ou $\dfrac{\text{circ. OA}}{\text{circ. O'A'}} = \dfrac{2\text{OA}}{2\text{O'A'}}$.

Deux circonférences de cercle sont entre elles dans le même rapport que leurs rayons ou leurs diamètres.

De la dernière égalité $\left(\text{en multipliant les deux membres par } \dfrac{\text{circ. O'A'}}{2\text{OA}}\right)$, on déduit :

$$\frac{\text{circ. OA}}{2\text{OA}} = \frac{\text{circ. O'A'}}{2\text{O'A'}}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le rapport constant de la circonférence au diamètre se désigne habituellement par la lettre grecque π. Ce nombre π ne peut être évalué que par approximation ; c'est ce qu'on appelle un nombre incommensurable. Il y a diverses manières d'en trouver une valeur approchée.

Manière d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre, $\pi = \dfrac{\text{circ.R}}{2\text{R}}$.

179. Le rayon d'une circonférence étant exprimé par un nombre donné, R, si on peut trouver le nombre qui exprime la longueur de la circonférence, circ. R, en divisant ce nombre trouvé par deux fois le rayon, on aura la valeur de π. Pour plus de simplicité, on cherche la longueur de la circonférence dont le rayon est l'unité linéaire ; $R = 1$.

Pour la trouver, on s'appuie sur la définition même :

La longueur de la circonférence est la limite dont s'approchent indéfiniment et jusqu'à en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée, les périmètres des polygones inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits.

Pour $R = 1$, le côté du carré inscrit égale $\sqrt{2}$ et son périmètre égale $4\sqrt{2}$, qu'on peut évaluer à moins d'une unité décimale quelconque.

Connaissant le côté et le périmètre du carré inscrit, on calcule approximativement le côté et le périmètre de l'octogone régulier inscrit (*), en employant, par exemple, la formule (a) du nº 174.

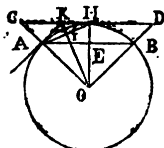
Connaissant le côté et le périmètre de l'octogone, on calcule de même le côté et le périmètre du polygone régulier de 16 côtés.

Et ainsi de suite; on calcule successivement (à l'aide de la même formule) les périmètres des polygones réguliers inscrits de 32, 64, 128..... côtés (**). Ces divers périmètres, que l'on peut évaluer en décimales avec autant d'approximation que l'on veut, sont, d'après la définition ci-dessus rappelée, des valeurs de plus en plus approchées de la longueur de la circonférence; en divi-

---

(*) La formule du nº 174, pour $R=1$, devient $x=\sqrt{2-\sqrt{4-c^2}}$; le périmètre $nx=n\sqrt{2-\sqrt{4-c^2}}$; on peut faire passer n sous le radical.

(**) Au lieu des formules des nºs 174 et 176, on peut employer pour calculer les périmètres inscrits et circonscrits successifs, les formules suivantes :



$$P'=\frac{2Pp}{P+p}\quad(1);\qquad p'=\sqrt{P'p}\quad(2).$$

Voici comment on trouve ces formules.

AB et CD sont les côtés de deux polygones inscrit et circonscrit de n côtés, dont nous désignerons les périmètres par p et P; AH, et le double de KH, sont les côtés des polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, dont nous désignerons les périmètres par p' et P'. On connaît p et P; il faut trouver p' et P'.

Pour cela, observons d'abord que $p=n.\mathrm{AB}=2n.\mathrm{AE}$; $\mathrm{P}=n.\mathrm{CD}=2n.\mathrm{CH}$; $p'=2n.\mathrm{AH}$; $\mathrm{P}'=2n.2\mathrm{KH}=4n.\mathrm{KH}$. Nous allons comparer AB, AE, etc. La ligne OK est bissectrice de l'angle COH; donc $\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{KH}}=\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OH}}=\frac{\mathrm{P}}{p}$; car les périmètres des polygones donnés sont entre eux comme les rayons OH, OC des cercles circonscrits à ces polygones. De la dernière égalité, on déduit :

$$\frac{\mathrm{CK}+\mathrm{KH}}{\mathrm{KH}}\quad\text{ou}\quad\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{KH}}=\frac{\mathrm{P}+p}{p};$$

d'où $$\frac{4n.\mathrm{CH}}{4n.\mathrm{KH}}=\frac{\mathrm{P}+p}{p},\quad\text{c'est-à-dire,}\quad\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}=\frac{\mathrm{P}+p}{p};$$

d'où on déduit : $$\mathrm{P}'=\frac{2\mathrm{P}p}{\mathrm{P}+p}.\qquad(1)$$

Pour avoir p', on considère les triangles semblables KIH, HAE, qui

sant successivement ces nombres une fois trouvés par deux fois le rayon, c'est-à-dire par 2, on obtient des valeurs de plus en plus approchées du rapport cherché, π, de la circonférence au diamètre.

Pour premier périmètre, on peut prendre celui de l'hexagone régulier au lieu du carré. Pour $R=1$, le périmètre de l'hexagone égale 6; on calcule alors successivement (n° 174) les périmètres des polygones réguliers de 12, 24, 48..... côtés, et on divise ces périmètres par le diamètre 2.

Archimède, qui est parti de l'hexagone, a trouvé $\frac{22}{7}$ pour valeur approchée de π. Adrien Métius a trouvé $\frac{355}{113}$. Voici une valeur de π approchée à moins de 0,000000000001 :

$$\pi = 3{,}141592653589.$$

Il y a des méthodes beaucoup plus expéditives pour calculer π (elles sont expliquées dans le cours supérieur).

REMARQUE. Afin de connaître avec précision le degré de l'approximation avec laquelle chaque *demi*-périmètre calculé exprime la valeur de π, il convient, chaque fois qu'on a calculé un de ces périmètres inscrits, de calculer aussitôt le périmètre du polygone circonscrit du même nombre de côtés; (V. la formule (*b*), n° 176 ou les formules (1) et (2) de la note ci-dessous). La circonférence étant comprise entre le périmètre d'un polygone régulier inscrit et le périmètre du polygone circonscrit semblable, la différence entre la circonférence et le périmètre inscrit, par exemple, est moindre que la différence entre ces deux pé-

---

donnent : $\frac{KH}{AH}=\frac{IH}{AE}$, d'où $\frac{4n.KH}{2n.AH}=\frac{4n.IH}{2n.AE}$,

ou $\frac{P'}{p'}=\frac{p'}{p}$, d'où $p'^2=P'p$ et $p'=\sqrt{P'p}$ (2).

La différence entre les périmètres diminue rapidement; car $P'-p'<\frac{1}{4}(P-p)$:

$$p'^2=P'p=\frac{2Pp^2}{P+p};\quad P'^2=\frac{4P^2p^2}{(P+p)^2};\quad P'^2-p'^2=\frac{2Pp^2}{P+p}\left(\frac{2P}{P+p}-1\right)=$$

$$\frac{2Pp^2}{P+p}\times\frac{P-p}{P+p};\quad \text{d'où}\quad P'-p'=\frac{2Pp}{(P+p)^2}\times\frac{p}{P'+p'}\times(P-p).$$

Mais $\frac{2Pp}{(P+p)^2}<\frac{1}{2}$; $p<P'$ et $p<p'$ donnent $\frac{p}{P'+p'}<\frac{1}{2}$; donc $P'-p'<\frac{1}{4}(P-p)$.

rimètres. Cette dernière différence est donc une limite supérieure de l'erreur commise en prenant le périmètre inscrit pour la longueur de la circonférence.

Si les nombres qui expriment deux périmètres, l'un inscrit, l'autre circonscrit, semblables, ont un certain nombre de chiffres communs consécutifs à partir du premier à gauche, ces chiffres communs appartiennent à la véritable valeur de la circonférence. En divisant par 2, et écrivant seulement la partie commune aux deux demi-périmètres, on a certainement la valeur de π, à moins d'une unité du dernier ordre ainsi écrit.

Ex. : Pour les périmètres de 1024 côtés, on trouve 3,1415729 et 3,1416025. On peut affirmer que la valeur de π commence ainsi : $\pi = 3,141.....$ Cela est évident.

APPLICATIONS.

180. *Calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné.*

De $\frac{\text{circ. R}}{2\text{R}} = \pi$, on déduit $\text{circ. R} = \pi \times 2\text{R} = 2\pi\text{R}$. (1)

Il suffit de multiplier la valeur du diamètre par le nombre π. Soit par exemple : $\text{R} = 2^{\text{m}},74$. On demande la longueur de la circonférence à moins de $0^{\text{m}},01$.

$2\text{R} = 5^{\text{m}},48$; on effectuera la multiplication abrégée que voici posée :

3,141 5
84,5
15 707 5
1 256 4
251 2
17,215 1

17,22 est la longueur demandée.

Si on demande la même longueur à moins d'une erreur relative de 0,01, comme les deux nombres à multiplier π et 2R commencent tous deux par un chiffre plus grand que 1, on emploiera trois chiffres de chaque facteur, et on fera la multiplication ordinaire de 3,14 par 5,48.

Ici on ne peut compter que sur les deux premiers chiffres à gauche, c'est-à-dire sur la partie entière 17.

2° Problème. *La longueur d'un méridien terrestre étant* 40000000 *mètres, trouver le rayon à moins de* 1 *kilomètre.*

$$\text{circ. } R = 2\pi R = 40000 \text{ kilomètres.}$$

$$R = \frac{40000^k}{2\pi} = \frac{20000^k}{\pi}.$$

Il faut trouver ce quotient à moins d'une unité. En posant la division, eu égard aux premiers chiffres de π, $\pi = 3,141.....$, on voit que le quotient aura 4 chiffres à sa partie entière ; il faut donc prendre les 6 premiers chiffres de π, et faire la division abrégée qui suit :

2000000	314159
115046	6366
20801	
1955	
71	

Le rayon demandé est 6366 kilomètres à moins de 1 kilomètre.

Problème.

181. *Trouver la longueur d'un arc de 19° 27′ 43″ appartenant à une circonférence dont le rayon égale* $2^m,74$.

Soit x la longueur cherchée.

19° 27′ 43″ exprime le rapport de l'arc cherché à la circonférence $2\pi R$; on a :

$$\frac{x}{2\pi R} = \frac{19°\,27'\,43''}{360°} = \frac{70063}{1296000}.$$

Nous avons converti les deux termes du second rapport en secondes ; on déduit de là :

$$x = \frac{70063 \times 2\pi \times 2,74}{1296000}.$$

LIVRE IV.

DE L'AIRE DU POLYGONE ET DU CERCLE.

PRÉLIMINAIRE.

182. *Le rapport de deux surfaces est le quotient de deux nombres qui expriment respectivement combien de fois ces surfaces contiennent la même unité ou commune mesure.*

Mesurer une surface, c'est trouver son rapport à la surface choisie pour unité.

L'unité de surface est ordinairement le *carré*, qui a pour côté l'unité linéaire. Ex. : Le *mètre carré*.

L'*aire* d'une figure plane est le nombre d'unités superficielles qu'elle contient ; c'est la valeur numérique de cette surface. Ex. : L'aire d'un triangle est 12 mètres carrés ; l'aire d'un hexagone régulier est $12^{mc},75$.

Nous avons appelé figures *égales* des figures qui peuvent coïncider dans toute leur étendue.

On appelle figures *équivalentes* deux figures qui, sans pouvoir coïncider, ont cependant la même étendue, *dont les aires sont égales*.

Par ex. : Deux figures sont *équivalentes* si elles sont composées de figures égales chacune à chacune, assemblées différemment. C'est ainsi (page 124) que

le parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle DCIH, que le triangle ADF (page 125) est équivalent au trapèze ABCD.

Ou bien encore, si de deux figures égales on retranche, en des endroits différents, la même figure, ou plusieurs figures égales chacune à chacune, les restes sont des figures équivalentes. Ex. : (page 124) si du trapèze ADCI on retranche sur la droite le triangle CBI, il reste le parallélogramme ABCD; si du même trapèze on retranche sur la gauche le triangle égal ADH, il reste le rectangle DCIH; le parallélogramme et le rectangle sont équivalents.

En général, deux surfaces sont *équivalentes*, c'est-à-dire ont des *aires égales*, quand on les obtient par les mêmes opérations faites sur des surfaces égales, c'est-à-dire superposables.

Lorsque dans les applications numériques, à propos de rapports ou de relations quelconques entre les figures planes, on dit simplement *triangle*, *rectangle*, *polygone*, *cercle*, il s'agit des *aires* de ces figures et non de leurs périmètres; ceux-ci sont toujours expressément désignés.

Les termes suivants sont principalement employés dans les énoncés et les démonstrations des propositions relatives aux aires.

L'un des côtés d'un rectangle prend le nom de *base;* le côté adjacent est la *hauteur*. Ex. : Dans le rectangle ABCD (fig. suiv.), nous prenons pour *base* AB, et pour hauteur AD; on pourrait faire l'inverse.

L'un des côtés d'un parallélogramme prend le nom de *base;* la *hauteur* est la perpendiculaire qui mesure la distance entre la base et le côté opposé. Dans le parallélogramme ABCD (page 124), on prend AB pour base et DH pour hauteur.

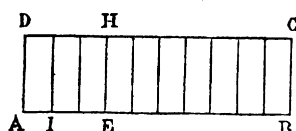
L'un des côtés d'un triangle prend le nom de *base;* la *hauteur* est alors la perpendiculaire qui mesure la distance du sommet opposé à cette base. On peut prendre à volonté un côté quelconque pour base.

Les deux côtés parallèles d'un trapèze prennent le nom de *bases;* la *hauteur* est la perpendiculaire qui mesure la distance des deux bases.

Théorème.

183. *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

On peut faire coïncider les hauteurs égales; alors les bases AE, AB, prenant la même direction, les deux rectangles se trouvent placés comme la figure l'indique.



Supposons maintenant que les bases AB, AE aient une commune mesure, AI, contenue 3 fois dans AE, et 10 fois dans AB; le rapport $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{10}$. (1)

AE et AB étant divisés en parties égales, menons une perpendiculaire à AB par chaque point de division; ces perpendiculaires divisent les rectangles proposés en rectangles partiels égaux entre eux (car on peut faire coïncider deux quelconques de ces rectangles); l'un d'eux AID est donc une commune mesure contenue 3 fois dans AEHD et 10 fois dans ABCD; donc $\frac{AEHD}{ABCD} = \frac{3}{10}$.

Le rapport des rectangles est $\frac{3}{10}$ comme celui des bases.

Donc $$\frac{AEHD}{ABCD} = \frac{AE}{AB}.$$ C. Q. F. D.

Cette démonstration réussit évidemment dans tous les cas où les bases ont une commune mesure, si petite qu'elle soit; elle est donc vraie en général.

La même démonstration prouve que

Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs (V. les Définitions).

Théorème.

184. *Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

Soient B la base d'un rectangle donné R, et H sa hauteur; B' la base d'un second rectangle R', et H' sa hauteur. On peut, à côté des rectangles donnés, construire un 3e rectangle R'' ayant la base B du premier et la hauteur H' du second.

Cela fait, comparant les rectangles R et R'', on trouve que ces

rectangles, ayant la même base B, sont entre eux comme leurs hauteurs H et H'.

$$\frac{R}{R''} = \frac{H}{H'}.$$

Les deux rectangles R'' et R', qui ont la même hauteur H', sont entre eux comme leurs bases B et B'.

$$\frac{R''}{R'} = \frac{B}{B'}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on trouve :

$$\frac{R \times R''}{R' \times R''} = \frac{B}{B'} \times \frac{H}{H'} = \frac{B \times H}{B' \times H'},$$

ou en simplifiant le premier rapport :

$$\frac{R}{R'} = \frac{B \times H}{B' \times H'}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème.

185. *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur* (135). En d'autres termes :

Pour mesurer un rectangle, il suffit de mesurer sa base et sa hauteur avec l'unité linéaire, puis de multiplier l'un par l'autre les deux nombres ainsi obtenus; le produit est le nombre d'unités carrées contenues dans la surface du rectangle.

Soient R le rectangle donné, B sa base et H sa hauteur. Il s'agit d'évaluer le rapport de ce rectangle au carré C, unité de surface, qui peut être considéré comme un rectangle ayant pour base l'unité linéaire u et pour hauteur la même ligne. Or, d'après le théorème précédent $\frac{R}{C} = \frac{B \times H}{u \times u}$, ou ce qui revient au même

$$\frac{R}{C} = \frac{B}{u} \times \frac{H}{u}. \qquad (1)$$

En langage ordinaire, cette égalité (1) signifie précisément que le nombre des unités de surface, contenues dans le rectangle donné, $\left(\frac{R}{C}\right)$, est égal au nombre des unités linéaires contenues dans la base, $\left(\frac{B}{u}\right)$, multiplié par le nombre des unités linéaires contenues dans la hauteur, $\left(\frac{H}{u}\right)$. Notre théorème est donc démontré.

Corollaire. *L'aire d'un carré dont le côté est* c *est égale à* $c \times c$ *ou* c^2; de là le nom de *carré* donné en arithmétique au produit d'un nombre par lui-même.

1[er] ex. : *La base d'un rectangle est* 8 *mètres, sa hauteur* 5 *mètres;* L'aire de ce rectangle est égale à 8×5 ou 40 mètres carrés.

$$\text{Ici} \qquad \frac{B}{u} = 8\,; \ \frac{H}{u} = 5\,; \ \frac{R}{C} = 8 \times 5 = 40\,; \ R = 40C.$$

2[e] ex. : $B = 3^{m},24$; $H = 2^{m},85$.

L'aire du rectangle égale $3,24 \times 2,85$ ou $9^{m.c.},2340$.

Remarque. C'est ici qu'il convient d'observer que le mètre carré vaut 100 décimètres carrés; 1 décimètre carré = 100 centimètres carrés, etc.

En effet, le mètre carré peut être considéré comme un rectangle ayant sa base et sa hauteur égales chacune à 10 décimètres; si donc le décimètre carré était pris pour unité de surface, le mètre carré, ayant une base et une hauteur égales à 10, aurait pour surface 10×10 ou 100 de ces unités.

On peut de même comparer le décimètre carré au centimètre carré, celui-ci au millimètre carré, et ainsi de suite :

$$1^{m.c.} = 100^{déc.c.} = (100 \times 100) \text{ ou } 10000^{cent.c.} = 1000000^{millim.c.}, \text{ etc.}$$

Un décimètre carré n'est donc qu'un centième de mètre carré; un centimètre carré est un dix-millième de mètre carré, etc.

De là cette règle :

Pour énoncer un nombre décimal d'unités carrées, on partage la partie décimale en tranches de 2 chiffres à partir de la virgule, en complétant la dernière tranche par un 0, si elle n'a qu'un chiffre.

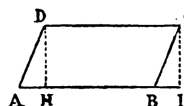
Cela fait, la 1re tranche à droite de la virgule exprime des décimètres carrés, la 2e des centimètres carrés, la 3e des millimètres carrés, etc. On énonce le nombre en conséquence.

La dernière aire trouvée, 9m. c.2340, s'énonce ainsi : 9 mètres carrés, 23 décimètres carrés, 40 décimètres carrés.

Théorème.

186. *Tout parallélogramme* ABCD *est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur.*

Pour le prouver, j'abaisse DH et CI perpendiculaires à AB; j'obtiens aussi un rectangle DCIH qui a même base que le parallélogramme (IH = DC = AB), et même hauteur DH. Ces deux figures sont équivalentes. En effet :



Le parallélogramme ABCD = le triangle DAH + le trapèze DCBH.

Le rectangle DCIH = le triangle CBI + le trapèze DCBH. Or les triangles rectangles DAH, CBI sont égaux comme ayant l'hypoténuse AD = BC, et le côté DH = CI (parallèles comprises entre parallèles). Donc ABCD = DCIH. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

187. *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, ce parallélogramme est équivalent à un rectangle qui aurait même base et même hauteur; or l'aire de celui-ci est égale au produit de cette base par la hauteur (186).

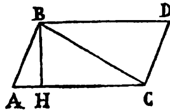
COROLLAIRE. *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

Deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

Théorème.

188. *L'aire d'un triangle* ABC *est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Pour le démontrer, on mène BD parallèle à AC, et CD parallèle à AB; on obtient ainsi un parallélogramme ABCD *double* du triangle ABC; car les deux triangles ABC, BCD sont égaux (V. page 33). L'aire du parallélogramme étant égale à AC$\times$BH, celle du triangle égale $\frac{1}{2}$ AC$\times$BH. C. Q. F. D.



Application. Trouver l'aire d'un triangle dont la base B = 3,84 et la hauteur 2^m,7.

Réponse $\frac{1}{2}$ $(3{,}84 \times 2{,}7)^{m.c.} = 5{,}184$; ou $5^{m.c.}$, $18^{d.c.}$, $40^{c.c.}$

COROLLAIRES. I. *Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents.*

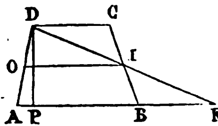
II. *Deux triangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

De $t = \frac{1}{2}\, b \times h$, $t' = \frac{1}{2}\, b' \times h'$, on déduit $\frac{t}{t'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$.

III. *Deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

189. *L'aire d'un trapèze est égale à la demi-somme de ses bases parallèles multipliée par sa hauteur.*

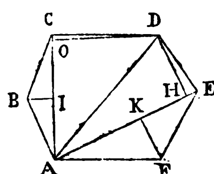
Pour le prouver, je mène par le milieu I de BC la ligne DI que je continue jusqu'à la rencontre de AB prolongée, en F. Les triangles DIC, IBF, sont égaux; car IB = IC; les angles en I sont égaux, et l'angle ICD = IBF (alternes internes); donc DC = BF; DI = IF. Si du trapèze je retranche le triangle DCI pour ajouter plus bas le triangle égal IBF, j'obtiens une nouvelle figure, le triangle DAF équivalent au trapèze. Or ADF $= \frac{1}{2}$ AF $\times$ DP; donc le trapèze ABCD $= \frac{1}{2}$ AF$\times$DP; mais AF = AB + BF = AB + CD; remplaçant AF par cette valeur, on trouve ABCD $= \frac{1}{2}$(AB + CD)$\times$DP. C. Q. F. D.



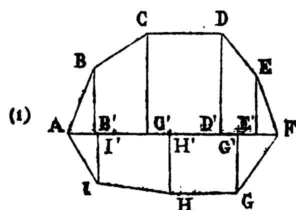
190. L'aire d'un trapèze s'obtient aussi *en multipliant la hauteur par la ligne qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

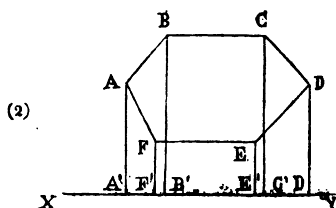
Par le point I milieu de BC, je mène une parallèle à AB; comme I est le milieu de DF, O est le milieu de DA (137); de plus, les triangles semblables DOI, DAF donnent $\frac{OI}{AF}=\frac{DO}{DA}$; or, $DO=\frac{1}{2}DA$; donc $OI=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}(AB+CD)$. On peut donc, dans la mesure du trapèze, remplacer $\frac{1}{2}(AB+CD)$ par OI. Le trapèze $ABCD=OI\times DP$. C. Q. F. D.

191. *Aire d'un polygone.* Pour obtenir l'aire d'un polygone, on le décompose en triangles, en joignant l'un de ses sommets à tous les autres; on détermine l'aire de chacun des triangles ainsi obtenus, puis on additionne les aires trouvées; la somme est évidemment l'aire du polygone.



192. Quelquefois il est plus commode de décomposer le polygone en d'autres figures que l'on sait aussi mesurer. L'une des méthodes les plus usitées dans l'arpentage consiste à décomposer le polygone en trapèzes et triangles rectangles, comme il est indiqué dans les figures suivantes.





On choisit une ligne intérieure ou extérieure au polygone, ce qu'on appelle *une base*, sur laquelle on abaisse des perpendiculaires de tous les sommets du polygone. Quand la base est intérieure (fig. (1)), le polygone est la somme de plusieurs trapèzes ou triangles rectangles qu'on mesure aisément. Quand elle est extérieure (fig. (2)), le polygone est égal à la somme de plusieurs tra-

pèzes AA'B'B + BCC'B' + CDD'C', moins la somme de plusieurs autres AFF'A' + FEE'F' + EDD'E'.

Toutes les parties de la base se mesurent en même temps, puisqu'il n'y a qu'à porter le mètre ou la chaîne métrique dans une seule direction. Il en serait de même des hauteurs si on les projetait toutes sur une même perpendiculaire à la base.

L'aire du premier polygone est égale à

$$\frac{(BB' \times AC' + CC' \times B'D' + DD' \times C'E' + EE' \times D'F')}{2} + \frac{(II' \times AH' + HH' \times I'G' + GG' \times H'F)}{2}.$$

Chaque hauteur (ex. : BB') appartient à deux bases que nous avons réunies (AB' + B'C' = AC').

L'aire du deuxième polygone est égale à

$$\frac{1}{2}(AA' \times B'F' + BB' \times A'C' + CC' \times B'D' + DD' \times E'C' - EF' \times F'D' - FF' \times A'E').$$

Nous engageons le lecteur à faire des applications numériques qui n'offrent d'ailleurs aucune difficulté.

193. Le produit de deux lignes, a, b, c'est-à-dire le produit des nombres qui expriment ces lignes, a maintenant pour nous une signification géométrique précise ; il exprime l'aire du rectangle construit avec ces deux lignes, a et b, pour base et pour hauteur.

Le carré a^2 d'une ligne a, c'est-à-dire le carré du nombre qui exprime la longueur de a exprime l'aire du carré ayant cette ligne a pour côté.

D'après cela, nous pouvons donner une signification géométrique aux formules du Livre III qui renferment des produits de lignes et des carrés.

194. La formule $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (1), démontre ce théorème :

Le carré construit sur la somme de deux lignes est égal à la somme des carrés construits sur ces deux lignes, plus deux fois le rectangle qui aurait ces mêmes lignes pour côtés.

Bien que l'égalité (1) n'ait été démontrée qu'en arithmétique ou en algèbre, la vérité de la proposition de géométrie que nous

venons d'énoncer est parfaitement démontrée par cette égalité. Il suffit de considérer les aires que ses différents termes représentent dans l'hypothèse où a et b sont des nombres exprimant les longueurs de deux lignes a et b.

A ce point de vue, l'égalité (1) exprime évidemment que l'aire du carré construit sur la somme des deux lignes, $(a+b)^2$, est égale à l'aire du carré construit sur la ligne a, (a^2), plus l'aire du carré construit sur la ligne b, (b^2), plus deux fois l'aire du rectangle qui aurait pour côtés les lignes a et b, $(2a\times b)$.

Or c'est ce qui est dit d'une manière plus abrégée dans l'énoncé de la proposition qui nous occupe.

De même la formule $(a-b)^2=a^2+b^2-2a\times b$ (2), interprétée géométriquement, au point de vue des aires que ses termes représentent, démontre ce théorème :

Le carré construit sur la différence de deux lignes **a**, **b**, *est égal à la somme des carrés construits sur ces deux lignes moins deux fois le rectangle construit sur ces deux lignes.*

De même la formule $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (2), prouve que *le rectangle construit avec la somme et la différence de deux lignes pour côtés, est égal à la différence des carrés construits sur ces deux lignes.*

195. BC, AB, AC étant les valeurs numériques de l'hypoténuse et des deux autres côtés d'un triangle rectangle ABC, nous avons démontré, n° 154, que $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$. Cette égalité, interprétée comme les précédentes, démontre ce théorème :

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

196. L'angle B d'un triangle ABC étant aigu, on a trouvé (n° 155) entre les valeurs numériques des côtés AC, AB, BC du triangle et celle de la projection BD de AB sur BC, la relation que voici :

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\times BD.$$

Cette égalité démontre ce théorème.

Le carré construit sur le côté d'un triangle opposé à un angle aigu est égal à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle construit sur l'un de ces derniers côtés et la projection de l'autre sur celui-là.

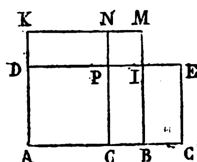
197. L'angle C du triangle ABC étant obtus, on a trouvé, n° 156, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$. Cette égalité démontre la proposition suivante :

Le carré construit sur le côté d'un triangle opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres, plus deux fois le rectangle construit sur l'un de ces derniers côtés et la projection de l'autre sur celui-là (*).

198. Les formules que nous venons d'appliquer ont été démontrées par le calcul et des considérations géométriques. Nous allons en donner des démonstrations purement géométriques. Bien qu'aucune vérification des résultats obtenus ne soit nécessaire, la concordance des deux méthodes ne pourra que donner au lecteur plus de confiance dans l'application du calcul à la géométrie.

Théorème.

199. *Le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes* a *et* b, *équivaut à la différence des carrés de ces lignes.*



$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Soit $AB = a$, $BC = b$; $AC = a - b$; $AC' = a + b$. Je mène $AD = AC$ perpendiculaire sur AB; et j'achève le rectangle $ADEC' = AC' \times AD = (a+b)(a-b)$; je prolonge ensuite AD d'une longueur $DK = BC$; enfin j'achève le carré ABMK ou $\overline{AB}^2$. En comparant ce carré ABMK et le rectangle ADEC', on leur trouve une partie commune, ADIB; on a

$$ADEC' = ADIB + IBC'E.$$

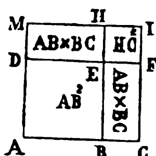
$$ABMK - NPIM \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = ADIB + KDPN.$$

Les deux rectangles IBC'E, KDPN sont égaux; car $IB = AD = AC$ et $DP = AC$; d'ailleurs $DK = BC'$. De IBC'E égal à KDPN, on conclut $ADEC' = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$, ou $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. C. Q. F. D.

(*) Nous croyons ces démonstrations des théorèmes relatifs aux carrés des côtés d'un triangle conformes au programme; selon nous, les suivantes ne sont pas exigées.

Théorème.

200. *Le carré construit sur la somme de deux lignes, est égal à la somme des carrés construits sur ces lignes, plus deux fois le rectangle qui a ces lignes pour côtés.*

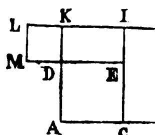


$$AC = AB + BC$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC. \qquad (1)$$

Ayant construit le carré ACIM sur AC, on peut le décomposer comme il est indiqué sur la figure; pour cela, on prend sur AM = AC, une longueur AD = AB; il reste DM = BC; par le point B on mène BH parallèle à AM, et par le point D la ligne DF parallèle à AC. A la seule inspection de la figure, on voit que le carré ACIM ou $\overline{AC}^2$ se compose comme l'indique l'égalité (1). Le rectangle DEHM = DE × DM = AB × BC; BCEF = BE × BC = AB × BC.

Théorème.

201. *Le carré construit sur la différence de deux lignes est égal à la somme des carrés construits sur ces lignes, moins deux fois le rectangle qui a ces lignes pour côtés.*

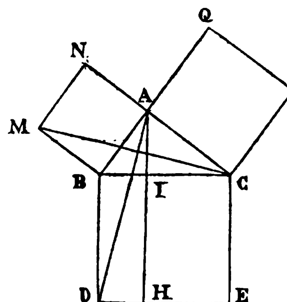


$$AC = AB - BC,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC.$$

Ayant construit le carré ABFK sur AB, je construis le carré ACED sur AC, en prenant AD = AC; alors DK = BC. Sur DK = BC, je construis le carré DKLM = $\overline{BC}^2$; enfin je prolonge CE jusqu'à rencontrer KF en I. La figure totale ABFLMDA = ABFK + DKLM = $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Or, si de cette figure totale on retranche (on efface) les deux rectangles CBIF, MEIL, il reste le carré fait sur AC; $\overline{AC}^2$ est donc égal à $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ moins ces deux rectangles; or, ICBF = IC × BC = AB × BC; MEIL = ME × ML = AB × BC; donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$. C. Q. F. D.

Théorème.

202. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.*



Je construis un carré sur chaque côté du triangle. Du point A j'abaisse sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AI que je prolonge jusqu'à la rencontre de DE en H; je joins AD, MC. L'angle MBC = MBA + ABC = 1dr. + ABC; de même l'angle ABD = 1dr. + ABC; donc l'angle MBC = ABD. Cela posé, les deux triangles BAD, BMC sont égaux comme ayant un angle égal, ABD = MBC, compris entre des côtés égaux chacun à chacun, savoir:

AB = MB (côtés d'un même carré), BD = BC (*idem*). Mais le triangle ABD et le rectangle BIHD ont même base BD et même hauteur ; car IB égale la perpendiculaire abaissée du sommet A sur BD prolongée ; le triangle ABD équivaut donc à la moitié du rectangle (n° 188). De même le triangle MBC et le carré MBAN ont même base MB et même hauteur ; car la perpendiculaire abaissée de C sur MB prolongée est égale à AB (NAC parallèle à MB). Le triangle MBC équivaut à la moitié du carré (*V.* leurs mesures). Or, le triangle ABD est égal au triangle MBC ; donc la moitié du rectangle équivaut à la moitié du carré ; donc $\overline{AB}^2 = BIHD$. On démontrerait de même que le carré ACPQ est équivalent au rectangle IHEC. En résumé, $BIHD = \overline{AB}^2$, $IHEC = \overline{AC}^2$; $\overline{BC}^2 = BIHD + IHEC$; donc $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. C. Q. F. D.

Corollaires. Les rectangles BIHD, IHEC ayant même hauteur IH, sont entre eux dans le même rapport que leurs bases $\frac{BIHD}{IHEC} = \frac{BI}{IC}$;

donc
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BI}{IC}.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit sont entre eux comme les segments adjacents de l'hypoténuse.

On a de même $\frac{BIHD}{BDEC} = \frac{BI}{BC}$, donc
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BI}{BC}.$$

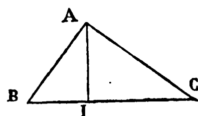
Le carré construit sur l'un des côtés de l'angle droit est au carré construit sur l'hypoténuse comme le segment adjacent est à l'hypoténuse elle-même.

Quant aux théorèmes relatifs aux carrés construits sur les côtés des triangles non rectangles, nous ne pourrions que répéter les démonstrations données dans le livre III. Ce sont des conséquences des trois théorèmes qui précèdent. Nous renvoyons au livre III (nos 155 et 156).

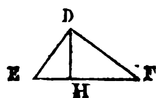
Rapport des figures semblables.

Théorème.

203. *Les aires de deux triangles semblables*, ABC, DEF *sont entre elles dans le même rapport que les carrés de deux côtés homologues quelconques.*



Abaissons les perpendiculaires AI, DH sur les côtés homologues BC, EF.



L'aire du triangle $ABC = \frac{1}{2} BC \times AI$; celle de DEF égale $\frac{1}{2} EF \times DH$;

or on a l'égalité
$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}. \qquad (1)$$

De plus, la similitude des triangles rectangles ABC, DEF qui ont l'angle aigu B = l'angle E donne
$$\frac{AI}{DH} = \frac{AB}{DE}. \qquad (2)$$

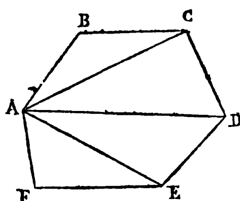
Multipliant les égalités (1) et (2) membre à membre, on trouve
$$\frac{BC \times AI}{EF \times DH} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2},$$

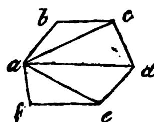
d'où
$$\frac{\frac{1}{2}\ BC \times AI}{\frac{1}{2}\ EF \times DH} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2};$$

c'est-à-dire
$$\frac{\text{l'aire de ABC}}{\text{l'aire de DEF}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2}.\ \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème.

204. *Les aires de deux polygones semblables sont entre elles comme les carrés de deux côtés homologues quelconques.*





D'après le théorème précédent :

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2};\ \frac{CAD}{cad} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2};\ \frac{DAE}{dae} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2};\ \frac{AFE}{afe} = \frac{\overline{FE}^2}{\overline{fe}^2}.$$

Mais puisque $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$, etc.; $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2}$, etc.;

donc
$$\frac{ABC}{abc}=\frac{CAD}{cad}=\frac{DAF}{daf}=\frac{AFE}{afe}.$$

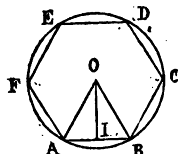
Faisant la somme des numérateurs d'une part, et la somme des dénominateurs de l'autre, on a d'après un théorème d'arithmétique.

$$\frac{ABC+CAD+DAE+AFE}{abc+cad+dae+afe}=\frac{ABC}{abc}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2}\text{ ; c'est-à-dire }\frac{ABCDEF}{abcdef}$$
$$=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2}.\text{ C. Q. F. D.}$$

Théorème.

205. *L'aire d'un polygone régulier est égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothème.*

Soit par ex.: l'hexagone régulier ABCDEF; je joins le centre aux sommets A et B, et j'abaisse OI perpendiculaire à AB; la surface du polygone se compose de six triangles AOB; or $AOB=AB\times\frac{1}{2}OI$; donc l'aire du polygone égale $6AB\times\frac{1}{2}OI$; ce qui est précisément le périmètre (6AB), multiplié par la moitié de l'apothème.



Ex. : Trouver la surface d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon R = 5 mètres.

$$S=3AB\times OI.$$

On sait que AB = R = 5; pour connaître OI, on remarque que le triangle OIA étant rectangle, on a

$$\overline{OI}^2=R^2-\overline{AI}^2=R^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=25-\frac{25}{4}=\frac{75}{4};$$

d'où
$$OI=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{\sqrt{75}}{2}.$$

Donc $S=\frac{15\times\sqrt{75}}{2}$; on évalue $\sqrt{75}$ approximativement.

Théorème.

206. *L'aire d'un cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon.*

Inscrivons un polygone régulier dans le cercle ; soit S l'aire de ce polygone, p son périmètre et a son apothème. On a vu que $S = p \times \frac{1}{2} a$. (1)

Supposons qu'on double indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone ; à mesure que le nombre des côtés augmente, le périmètre diffère de moins en moins de la circonférence, l'apothème du rayon, et l'aire du polygone de l'aire du cercle. Comme au n° 177, la considération de ces polygones conduit à cette triple conclusion :

La circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier dont on double indéfiniment le nombre des côtés. Le cercle est la limite de l'aire des mêmes polygones, et le rayon est la limite de son apothème.

Comme l'égalité (1) est vraie, quel que soit le nombre des côtés du polygone, elle s'applique encore quand on arrive à la limite ; mais alors S devenant cercle R, p, circ. R, et a égal à R, on a :

$$\text{cercle R} = \text{circ. R} \times \frac{R}{2}. \qquad (1)$$

1re Remarque. Circ. $R = 2\pi R$; donc $\text{cercle} R = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2$.

Pour obtenir l'aire d'un cercle de rayon donné, il suffit de multiplier le carré du rayon par le rapport constant π de la circonférence au diamètre.

Corollaire. *Les aires de deux cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.*

En effet, $\text{cercle} R = \pi R^2$; $\text{cercle} R' = \pi R'^2$.

Donc $$\frac{\text{cercle } R}{\text{cercle } R'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème.

207. *L'aire d'un secteur est égale à la longueur de son arc multipliée par la moitié du rayon.*

Pour le démontrer, je divise l'arc AE en un certain nombre de parties égales, quatre, par ex. : je mène les cordes des arcs partiels, et je joins les points de division au centre. J'obtiens ainsi quatre triangles isocèles; l'aire de chaque triangle est égale à sa base multipliée par la moitié de l'apothème OI; la somme des aires de tous les triangles, c'est-à-dire l'aire du secteur polygonal, égale $4AB \times \frac{1}{2} OI = \text{périm. } ABCDE \times \frac{1}{2} OI$ (1).

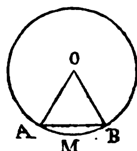
On peut doubler indéfiniment le nombre des côtés de la ligne inscrite; l'égalité (1) est toujours vraie, quelque grand que soit le nombre des côtés. A la limite, l'arc AE pouvant être considéré comme une ligne polygonale d'un très-grand nombre de côtés infiniment petits, le secteur OAE peut être considéré comme un secteur polygonal ayant l'arc pour base, et le rayon pour apothème. L'aire du secteur est donc égale à la longueur de son arc multiplié par la moitié du rayon. C. Q. F. D.

208. Remarque. On a secteur $OAE = \text{arc } AE \times \frac{1}{2} R$; cercle R $= \text{circ. } R \times \frac{1}{2} R$; on déduit de là

$$\frac{\text{sect. } OAE}{\text{cercle } R} = \frac{\text{arc. } AE}{\text{circ. } R}.$$

Le secteur est au cercle comme l'arc est à la circonférence.

209. Segment de cercle. *L'aire d'un segment de cercle* AMB *est égale à l'aire du secteur* OAMB *diminuée de l'aire du triangle* OAB. *Or on sait évaluer ces deux aires.*



APPLICATION.

210. 1er ex. : *Le rayon d'un cercle est* $3^m,84$; *calculer l'aire de ce cercle à moins d'un centimètre carré.*

$$R^2=(3,84)^2=14,7456.$$

Il faut calculer le produit πR^2 à moins de 0,0001.

On fera cette multiplication abrégée :

$$\begin{array}{r} 3,1415926 \\ 6547,41 \\ \hline \end{array}$$

Le produit, borné aux dix-millièmes (V. l'Arithm.), exprimera l'aire demandée.

211. 2e Ex. : *Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est égale à* 32 *mètres carrés.*

On a l'égalité $\pi R^2=32$,

d'où $R^2=\frac{32}{\pi}$, et $R=\sqrt{\frac{32}{\pi}}$.

On peut se proposer de calculer R à moins de $0^m,01$; on calculera 3 chiffres de la racine carrée. Pour cela, il suffira de connaître 3 chiffres du quotient $\frac{32}{\pi}$; on peut employer la division abrégée en prenant π par excès avec 4 décimales.

212. 3e Ex. : *Le rayon d'un cercle est* $3^m,84$; *trouver l'aire d'un secteur ayant pour base un arc de* 28° 19′ 41″.

On raisonne ainsi :

$$\frac{\text{secteur}}{\text{cercle}}=\frac{\text{arc}}{\text{circ.}}=\frac{28^\circ 19' 41''}{360^\circ}=\frac{101981}{1296000};$$

ou $\frac{\text{secteur}}{\pi R^2}=\frac{101981}{1296000}$; d'où le secteur $=\frac{\pi R^2\times 101981}{1296000}=$

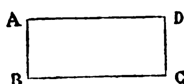
$$\frac{\pi\times(3,84)^2\times 101981}{1296000}.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer les calculs. Telle est la marche qu'il faut suivre quand on donne le nombre de degrés de l'arc d'un secteur.

APPENDICE.

Problème.

213. 1° *Construire un carré équivalent à un rectangle donné* ABCD.



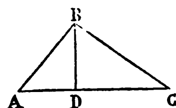
Soit X le côté du carré cherché ; l'aire du carré est X^2, et celle du rectangle $BC \times BA$; ces deux aires doivent être égales ; on a donc

$$X^2 = AB \times BC.$$



De cette égalité il résulte que la ligne inconnue X est une moyenne proportionnelle entre les côtés AB, BC du rectangle ; on construit cette moyenne proportionnelle comme il a été indiqué n° 162.

2° *Construire un carré équivalent à un triangle donné* ABC.



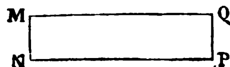
Si le côté du carré cherché est X, on doit avoir

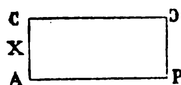
$$X^2 = \frac{1}{2} AC \times BD.$$

Le côté X du carré cherché est donc une moyenne proportionnelle entre la moitié de AC et BD.

Problème.

214. *Sur une ligne donnée* AP *comme base, construire un rectangle équivalent à un rectangle donné* MNPQ.





Pour construire le rectangle demandé, il suffit de connaître sa hauteur ; soit X cette hauteur.

L'aire de ce rectangle cherché sera $AB \times X$; celle du rectangle donné est $NP \times MN$; on doit donc avoir : $AP \times X = NP \times MN$; d'où l'on déduit, en divisant par $X \times NP$:

$$\frac{AP}{NP} = \frac{MN}{X}.$$

La ligne inconnue X est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes données AP, NP, MN ; on construira cette ligne X comme il a été indiqué n° 161.

Problème.

215. 1° *Construire un triangle équivalent à un polygone donné ;* 2° *un carré équivalent au même polygone.*

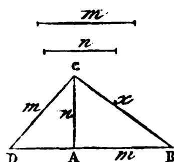
Pour construire un triangle équivalent à un polygone donné ABCDE, on mène d'abord une diagonale BD qui détache du polygone un triangle BCD; par le sommet C ainsi séparé, on mène une parallèle à la diagonale BD jusqu'à la rencontre en I du côté ED (adjacent à BD) prolongé, puis on joint le point I à l'autre extrémité B de la diagonale. On obtient ainsi un triangle BDI équivalent à BCD; car ces deux triangles ont la même base BD et même hauteur, puisque les sommets C et I sont situés sur une parallèle CI à la base commune. Cela posé, on peut remplacer le triangle BCD par le triangle BDI; ce qui donne le quadrilatère ABIE équivalent au pentagone ABCDE.

Dans ABIE on sépare encore un triangle BAE en menant une diagonale BE; par le sommet séparé A on mène AO parallèle à la diagonale, jusqu'à la rencontre de IE prolongé; on tire OB; le triangle OBE équivaut au triangle ABE; remplaçant ABE par OBE, on obtient le triangle BOI = ABIE = ABCDE.

Pour construire un carré équivalent à un polygone donné ABCD, on construit d'abord un triangle équivalent à ce polygone, puis un carré équivalent au triangle.

Problème.

216. *Construire un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.*



Soient m et n les côtés des carrés donnés et x le côté du carré cherché. Si on veut un carré équivalent à m^2+n^2, on fait un angle droit A; sur l'un des côtés on prend une longueur $AB = m$, et sur l'autre $AB = n$; on tire CB; CB est le côté du carré cherché; car $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = m^2 + n^2$.

Si l'on veut un carré équivalent à $m^2 - n^2$, on construit un angle droit CAD; on prend sur l'un des côtés une longueur $AC = n$; du point C comme centre avec une ouverture de compas égal à m, on décrit un arc de cercle qui coupe le second côté de l'angle droit en D; on tire CD; AD est le côté du carré cherché. En effet, $CD = m$; $AC = n$;

$$m^2 = n^2 + \overline{AD}^2; \qquad \text{d'où} \qquad \overline{AD}^2 = m^2 - n^2.$$

On peut aisément construire un carré équivalent à la somme de plusieurs carrés donnés :

$$x^2 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2.$$

On construit d'abord le côté d'un carré équivalent à $m^2 + n^2$; $x'^2 = m^2 + n^2$; puis le côté d'un carré équivalent à $x'^2 + p^2$; $x''^2 = x'^2 + p^2 = m^2 + n^2 + p^2$, et enfin le côté x''' d'un carré équivalent à $x''^2 + q^2$; $x'''^2 = x''^2 + q^2 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$. On obtiendrait d'une manière analogue le côté d'un

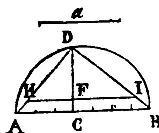
carré équivalent à la somme de plusieurs carrés diminuée d'un ou de plusieurs carrés donnés.

Problème.

217. *Construire un carré qui soit à un carré donné* a^2 *dans un rapport donné*, celui de 3 à 4, par ex. :

On veut avoir $\frac{x^2}{a^2}=\frac{3}{4}$ ou $x^2=\frac{3}{4}a^2$.

Sur une ligne indéfinie, à partir d'un point A, on prend 3 + 4 ou 7 longueurs égales quelconques; sur la longueur totale AB comme diamètre, on décrit une demi-circonférence; au point C, extrémité de la 3ᵉ division, on élève une perpendiculaire CD; on tire DA, DB; sur DB on prend une longueur DI $=a$, et par le point I, on mène IH parallèle à AB; la ligne DH est le côté du carré cherché. En effet, le triangle ADI étant rectangle, on a, d'après un théorème démontré (n° 202) :



$$\frac{DH^2}{DI^2}=\frac{HF}{FI}=\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}.$$

Si a était plus grand que DB, on prolongerait DB et DA. Pour prendre DI $=a$, etc.

Si m et n étant des lignes données, on devait avoir $\frac{x^2}{a^2}=\frac{m}{n}$, on prendrait sur une ligne indéfinie AC $=m$ et CB $=n$, puis on achèverait comme dans le cas précédent.

Problème.

218. *Deux polygones semblables étant donnés, en construire un troisième qui leur soit semblable et qui soit équivalent à leur somme ou à leur différence.*

Soient M et N les aires des figures données, m et n deux côtés homologues de ces figures; X l'aire de la figure demandée, x le côté de cette figure homologue à m et n. On doit avoir $X=M+N$, ou $X=M-N$. Or, d'après un théorème connu, $\frac{M}{N}=\frac{m^2}{n^2}$; d'où résulte $\frac{M+N}{N}=\frac{m^2+n^2}{n^2}$ (1). D'un autre côté, on a aussi $\frac{X}{N}=\frac{x^2}{n^2}$ (2). Comme $X=M+N$, $\frac{X}{N}=\frac{M+N}{N}$; donc $\frac{x^2}{n^2}=\frac{m^2+n^2}{n^2}$; d'où $x^2=m^2+n^2$. Si l'on devait avoir $X=M-N$, on arriverait de même à $x^2=m^2-n^2$.

Construire x revient donc à construire le côté d'un carré équivalent à m^2+n^2 ou à m^2-n^2; x étant construit, on construira sur x, comme côté homologue à m, une figure semblable à la première figure donnée.

Les figures données peuvent être des triangles, des polygones ou des cercles; dans ce dernier cas, m et n seraient les rayons.

Problème.

219. *Construire un polygone semblable à un polygone* P, *et qui soit à ce polygone dans un rapport donné.*

Ex. : $X = \frac{3}{7} P$.

Supposons le problème résolu, et soient p et x deux côtés homologues des polygones P et X; on sait que $\frac{X}{P} = \frac{x^2}{p^2}$; mais on doit avoir $\frac{X}{P} = \frac{3}{7}$; donc $\frac{x^2}{p^2} = \frac{3}{7}$, et $x^2 = \frac{3}{7} p^2$. Il s'agit de trouver le côté d'un carré qui soit les $\frac{3}{7}$ d'un carré donné p; on construira x comme il a été indiqué n° 217, et sur a, comme côté homologue à p, on construira un polygone semblable au polygone donné.

Problème.

220. *Construire un polygone* X *semblable à un polygone donné* P *et équivalent à un autre polygone donné* Q.

Soit a un côté quelconque du polygone P et x le côté homologue de X. On doit avoir $\frac{P}{X} = \frac{p^2}{x^2}$; mais $X = Q$, donc $\frac{P}{Q} = \frac{p^2}{x^2}$. Construisons le côté p d'un carré équivalent à P et le côté q d'un carré équivalent à Q; $P = p^2$, $Q = q^2$, donc $\frac{p^2}{q^2} = \frac{a^2}{x^2}$, d'où $\frac{p}{q} = \frac{a}{x}$. On aura x en construisant une quatrième proportionnelle aux lignes connues p, q et a.

Si on voulait avoir $X = \frac{3}{7} Q$, on construirait $q^2 = \frac{3}{7} Q$.

Application. *Construire un hexagone régulier équivalent à un polygone donné.*

Tous les hexagones réguliers étant des figures semblables, j'inscris un hexagone régulier dans un cercle quelconque; puis je construis un polygone X semblable à cet hexagone et équivalent au polygone donné. On remarquera que le côté du carré équivalent à l'hexagone est moyen proportionnel entre le demi-périmètre et l'apothème; $x^2 = 3c \times a$.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, 26, rue Racine.

SECONDE PARTIE.

FIGURES DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

DU PLAN ET DE LA LIGNE DROITE DANS L'ESPACE.

221. *Le plan est une surface telle que, si on y prend deux points, à volonté, et qu'on les joigne par une ligne droite, cette ligne est tout entière sur la surface* (nº 4).

Une ligne droite ne peut donc être en partie dans un plan, en partie au dehors.

Théorème.

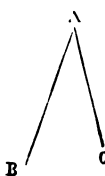
222. *Par deux droites qui se coupent on peut faire passer un plan, mais on n'en peut faire passer qu'un.*

En d'autres termes :

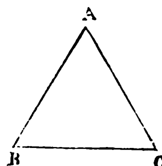
Deux droites qui se coupent déterminent la position d'un plan.

Soient AB, AC deux droites qui se coupent. Une ligne droite

étant tracée dans un plan indéfini, on peut la faire coïncider avec AB; le plan passant par AB, on peut le faire tourner autour de cette ligne comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le point C (*); alors la ligne AC qui a deux points dans le plan y est tout entière. On peut donc faire passer un plan par les deux lignes AB, AC; mais on n'en peut faire passer qu'un. En effet, si on fait tourner le plan autour de AB, à partir de sa position actuelle, au moindre mouvement d'un côté ou de l'autre, il quitte le point C, et ne contient plus la ligne AC.



223. Corollaire I. *Trois points* A, B, C, *non en ligne droite, sont dans le même plan, et en déterminent la position. Il en est de même des trois côtés d'un triangle* ABC.



En effet, ces trois points ou ces trois lignes sont dans le plan des deux lignes AB, AC.

224. Corollaire II. *Deux parallèles* AB, CD, *sont dans le même plan, et en déterminent la position.*

1° Suivant la définition (n° 49), elles sont dans le même plan.

2° Elles ne peuvent pas se trouver toutes deux à la fois dans deux plans différents; car s'il en était ainsi, par trois points non en ligne droite (A de AB, C et D de CD), il passerait deux plans différents; ce qui est impossible.

225. Remarque. Quand deux droites données seront dans un même plan, comme elles en détermineront la position, nous dirons :

Le plan de ces deux lignes; le plan BAC des lignes AB, AC; le plan ABCD des deux parallèles AB, CD.

Théorème.

226. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

Car si cette intersection comprenait seulement trois points A, B, C,

---

(*) On peut se figurer le plan comme une immense feuille de papier rigide tournant autour de AB; dans ce mouvement il passe successivement par tous les points de l'espace.

non en ligne droite, on conclurait de là que par trois points non en ligne droite il peut passer deux plans différents, ce qui est impossible.

227. Remarque. Pour représenter les plans dans les figures, nous sommes obligé de leur donner des limites; mais il faut toujours les concevoir indéfinis.

DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES A UN PLAN.

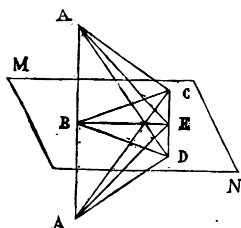
228. Définition. Une droite est *perpendiculaire* à un plan quand elle est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan; réciproquement le plan est perpendiculaire à la droite.

Le *pied* d'une perpendiculaire est le point où elle rencontre le plan.

Théorème.

229. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à deux autres* BC, BD, *qui passent par son pied dans un plan* MN, *elle est perpendiculaire à ce plan.*

Le théorème sera démontré si nous prouvons que AB est perpendiculaire à toute autre droite, BE, menée par son pied dans le plan MN. Pour cela, menons dans ce plan une ligne CED qui coupe les trois lignes BC, BD, BE; prolongeons AB d'une longueur BA' = BA, puis tirons AC, AE, AD, A'C, A'E, A'D. Dans le plan ACA les deux lignes CA, CA' sont deux obliques à la droite ABA', s'éloignant également du pied de la perpendiculaire CB; donc CA = CA'; on a de même, dans le plan ADA', l'oblique DA = DA'. Les deux triangles ACD, A'CD, qui ont déjà un côté commun CD, ont donc les trois côtés égaux. Nous pouvons les faire coïncider en faisant tourner A'CD, autour de CD comme charnière, pour le rabattre sur ACD. Cela fait, le point E n'ayant pas bougé, et A' étant venu en A, EA' coïncide avec EA; EA' étant égal à EA, le triangle AEA' est isocèle, et la

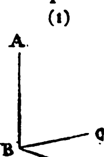


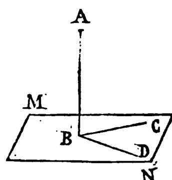
ligne EB qui va du sommet au milieu de la base, AA′, est perpendiculaire à cette base (n° 36). Réciproquement ABA′ est perpendiculaire à BE, donc elle est perpendiculaire au plan MN. C. Q. F. D.

Théorème.

230. *Par un point donné, on peut toujours faire passer une perpendiculaire à un plan donné; mais on n'en peut faire passer qu'une.*

Je prends une droite AB, fig. (1); je fais passer par cette ligne deux plans quelconques ABC, ABD, et je mène dans ces plans deux perpendiculaires BC, BD à AB; ces lignes BC, BD déterminent un plan CBD, perpendiculaire à AB (n° 229). Cela fait, si le point donné est un point B du plan MN, fig. (2), transportant la figure ABCD que je viens de former, je pose le plan CBD sur le plan MN, de manière que le point B de CBD coïncide avec le point B de MN. La ligne AB perpendiculaire aux lignes BC, BD est perpendiculaire au plan MN qui contient maintenant les deux droites.

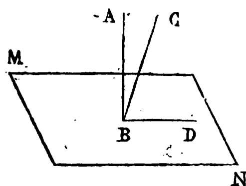




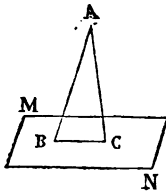
Si le point donné est un point A situé hors du plan MN, ayant posé le plan CBD sur le plan MN, je le fais glisser sur ce plan de manière que la ligne AB de la figure BACD vienne passer par le point donné A; ce qui évidemment est toujours possible; il passe alors par ce point donné A une perpendiculaire AB au plan MN.

231. *Par un point donné on ne peut faire passer qu'une perpendiculaire à un plan donné.*

Le point donné B peut être sur le plan donné; supposons que par ce point B il passe deux perpendiculaires BA, BC au plan MN; le plan ABC de ces deux lignes (n° 22) coupe le plan MN suivant une droite BD; AB étant perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à la ligne BD qui passe par son pied dans ce plan; par la même



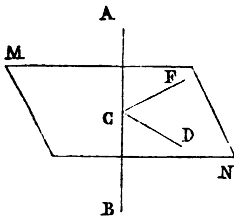
raison CB est aussi perpendiculaire sur BD; dans le *même plan* ABCD il y aurait donc, au même point B, deux perpendiculaires sur la même droite BD; ce qui est impossible. Il est donc également impossible qu'il passe par le point B deux perpendiculaires au plan MN.



Le point donné A peut être situé hors du plan donné MN; supposons qu'il passe par ce point A deux perpendiculaires AB, AC au plan MN; tirons BC. Dans le triangle ABC il y aurait deux angles droits B et C; ce qui est impossible.

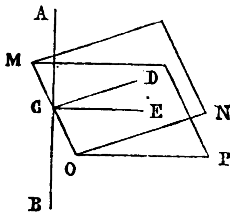
Théorème.

232. *Par un point donné on peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite donnée; mais on n'en peut faire passer qu'un.*



Le point donné C *peut être sur la droite donnée* AB. Je mène par la droite AB deux plans quelconques, et dans ces plans deux perpendiculaires CD, CF à la droite AB; ces deux lignes CD, CF déterminent un plan DCF (ou MN) qui est évidemment perpendiculaire à la droite AB (n° 229).

Par le point donné C on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à AB. En effet, supposons qu'on en puisse mener deux, MN, MP; par AB je fais passer un troisième plan quelconque, qui coupe les plans MP, MN suivant les lignes CE, CD; AB perpendiculaire au plan MP est perpendiculaire à CE; puis de même à CD du plan MN. Dans le même plan ACDE, il y aurait donc au même point C deux perpendiculaires à la même droite AB, ce qui est impossible; il est donc également impossible que deux plans perpendiculaires à AB passent par le même point C.



Le point donné C *peut être en dehors de la droite donnée* AB. Dans ce cas je mène dans le plan CAB une perpendiculaire CD sur AB; puis faisant passer un deuxième plan quelconque par AB, je mène dans ce plan DE perpendiculaire à AB; le plan EDC (CN) est perpendiculaire à AB (n° 229).

Par le point donné C on ne peut mener qu'un plan CN perpendiculaire à AB. En effet, un second plan perpendiculaire (CM) ne pourrait rencontrer AB au point D (2ᵉ cas); supposons qu'il rencontre cette ligne au point I. La ligne AB étant perpendiculaire aux deux droites IC, ID, le triangle CID aurait deux angles droits, ce qui est impossible.

Théorème.

233. *Toutes les perpendiculaires* OC, OD, OE, OI, *menées à la même droite* AB, *par un même point* O *de cette ligne, sont dans un même plan.*

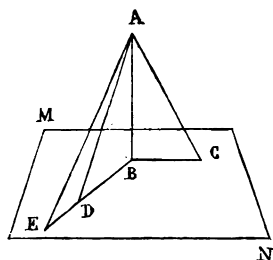
En effet, OC, OD déterminent un plan COD perpendiculaire à AB (n° 229); OE, OI déterminent un plan EOI également perpendiculaire à AB. Les deux plans COD, EOI sont un seul et même plan; sans quoi il passerait par le point O deux plans perpendiculaires à la droite AB, ce que nous venons de démontrer impossible.

234. Corollaire. *Si des lignes égales* AC, AD, AE, AI *forment avec la même ligne* AB *des angles égaux* CAB, DAB, etc., *leurs extrémités* C, D, E, I *sont sur une même circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à* AB.

J'abaisse CO perpendiculaire à AB; puis je tire OD, OE, OI; tous les triangles CAO, DAO, etc., sont égaux (n° 29); par suite les angles AOD, AOE, AOI sont droits comme AOC; on rentre dans le cas du théorème précédent. D'ailleurs OI = OE = OD = OC; donc, etc.

Théorème.

235. *Si du même point* A *on mène à un plan* MN *une perpendiculaire* AB, *et différentes obliques* AC, AD, AE;



1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques* AC, AD *qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales;*

3° *De deux obliques* AE, AC *qui s'écartent inégalement, celle qui s'écarte le plus est la plus longue.*

1° On a AB<AC; en effet, dans le plan ABC la perpendiculaire AB est plus courte qu'une oblique quelconque AC (livre I, n° 42).

La plus courte distance d'un point à un plan est donc la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

2° Si la distance BD = BC, l'oblique AC = AD.

En effet, les deux triangles rectangles ABC, ABD ayant le côté AB commun, BC = BD par hypothèse, sont égaux; de là résulte AC = AD.

3° Si on a BE > BC, l'oblique AE est plus grande que AC. En effet, on peut sur BE prendre une longueur BD = BC et tirer AD; l'oblique AD = AC; mais dans le plan ABDE, l'oblique AE est plus longue que AD (livre I, n° 42); donc AE > AC.

236. Les réciproques des théorèmes précédents sont toutes vraies.

1° *Deux obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire;* car si elles s'écartaient inégalement, celle qui s'écarterait le plus serait la plus longue.

De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

La démonstration est facile.

237. Remarque. Les pieds C, D de toutes les obliques égales menées d'un point A à un plan MN sont situées sur une circonfé-

rence de cercle, ayant pour centre le pied de la perpendiculaire menée du point A sur ce plan. On déduit de là un moyen mécanique de mener une perpendiculaire d'un point donné extérieur sur un plan donné; on mène du point A au plan MN au moins trois obliques égales entre elles; on fait passer une circonférence par les pieds de ces obliques sur le plan MN; la ligne qui joint le point A au centre de cette circonférence est la perpendiculaire demandée.

Théorème.

238. *Une droite* AB *étant perpendiculaire à un plan* MN, *si du pied* B *de cette ligne on mène une perpendiculaire* BD *à une ligne* CE *du plan* MN, *puis qu'on joigne un point quelconque de* AB *au point* D, *la ligne* AD *ainsi menée est perpendiculaire sur* CE.

Pour le démontrer, je prends sur EC, à partir de D, deux longueurs égales DC, DE; puis je mène BE, BC, AE, AC. Sur le plan MN, les obliques BE, BC sont égales comme s'écartant également du pied D de la perpendiculaire BD (DE = DC). Dans l'espace, les deux obliques AE, AC au plan MN qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire (BE = BC), sont égales entre elles. La ligne AD qui va du sommet du triangle isocèle ACE au milieu de la base AE est perpendiculaire à cette base (n° 36). C. Q. F. D.

Ce théorème est connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires* (AB, BD, AD).

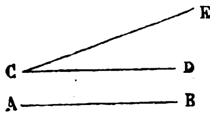
DROITES PARALLÈLES DANS L'ESPACE.

Théorème.

239. *Par un point* C, *donné dans l'espace, on peut toujours mener une parallèle à une droite donnée* AB, *mais on ne peut en mener qu'une.*

D'abord le point C et la droite donnée déterminent un plan CAB dans lequel on peut toujours mener une parallèle CD à la droite AB (livre I, n° 51).

On ne peut mener par le point C qu'une parallèle à la ligne AB.

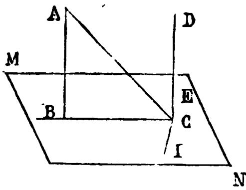


En effet, supposons qu'on en puisse mener deux CD, CE; les deux parallèles AB, CD sont dans un même plan ABCD; les deux parallèles AB, CE sont dans un même plan ABCE; les deux plans ABCD, ABCE ne sont qu'un seul et même plan, celui que nous avons appelé CAB; car ils ont avec celui-ci trois points communs C, A, B, non en ligne droite. Il y aurait donc, dans le même plan CAB, deux parallèles menées à la même droite AB, par le point C; ce qui est impossible (livre I, n° 52).

Théorème.

240. *Si deux lignes sont parallèles, tout plan* (MN) *perpendiculaire à l'une* (AB) *est perpendiculaire à l'autre.*

Le plan ABCD des deux parallèles coupe le plan MN suivant

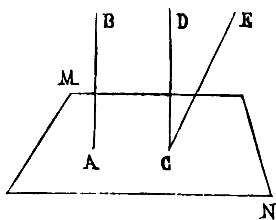


une droite BC; la ligne AB (perpendiculaire au plan MN), étant perpendiculaire à la droite BC, sa parallèle CD est aussi perpendiculaire à BC (livre I, n° 55); il suffit donc de prouver que CD est perpendiculaire à une seconde droite menée par son pied C dans le plan MN. Pour cela je mène dans ce plan une perpendiculaire IE à BC, et je tire AC; en vertu du théorème de trois perpendiculaires (n° 238), la ligne AC est perpendiculaire à IE; IE étant perpendiculaire à deux lignes CB, CA, qui passent par son pied dans le plan ABCD, est perpendiculaire à ce plan, et par suite à la ligne CD qui y est située. Réciproquement CD est perpendiculaire à IE; comme elle l'est déjà à CB, elle est perpendiculaire au plan MN. C. Q. F. D.

RÉCIPROQUE.

241. *Deux lignes* AB, CD *perpendiculaires au même plan* MN, *sont parallèles entre elles.*

En effet, si CD n'était pas parallèle à AB, on pourrait par le point C mener une parallèle CE à AB; AB étant perpendiculaire au plan MN, sa parallèle CE le serait aussi; il y aurait donc au même point C deux perpendiculaires CD, CE au même plan; ce qui est impossible. Il est donc également impossible que CD ne soit pas parallèle à AB.



DROITES ET PLANS PARALLÈLES; PLANS PARALLÈLES ENTRE EUX.

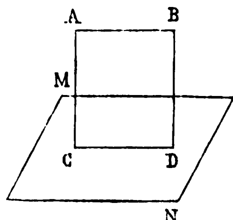
242. Définition. Une *droite* et un *plan* sont *parallèles* quand ils ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'ils se prolongent.

Deux *plans parallèles* sont deux plans qui ne peuvent se rencontrer.

Théorème.

243. *Si une droite* AB *est parallèle à une ligne* CD *située dans un plan* MN, *elle est parallèle à ce plan.*

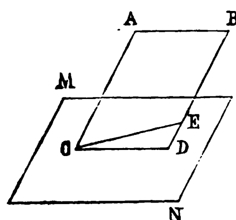
En effet, le plan ABCD des deux parallèles et le plan MN ont pour intersection la droite CD elle-même; la ligne AB qui ne sort pas du plan ABCD ne rencontre pas le plan MN; car elle ne pourrait le rencontrer qu'en un point de l'intersection CD des deux plans; ce qui est impossible, AB et CD étant parallèles.



Théorème.

244. *Si une ligne* AB *est parallèle à un plan* MN, *l'intersection* CD *du plan* MN *et d'un plan quelconque mené par* AB *est parallèle à* AB.

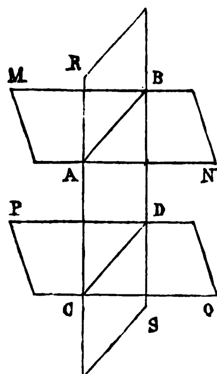
En effet, si AB rencontrait CD elle rencontrerait le plan MN; donc AB ne rencontre pas CD; d'ailleurs ces deux lignes sont dans le même plan; elles sont donc parallèles.



Corollaire. *Un plan* MN *et une droite* AB *étant parallèles, si on mène, par un point* C *du plan, une parallèle à* AB, *cette parallèle* CD *est située dans le plan* MN. En effet, si cette ligne CD n'était pas située dans le plan MN, l'intersection du plan ABCD des deux parallèles et du plan MN serait une droite CE, parallèle à AB (théorème précédent); par le même point C il y aurait donc deux parallèles à la même ligne AB, ce qui est impossible. Il est donc également impossible que CD ne soit pas dans le plan MN.

Théorème.

245. *Les intersections* AB, CD *de deux plans parallèles* MN, PQ *par un même plan* RS, *sont parallèles entre elles.*

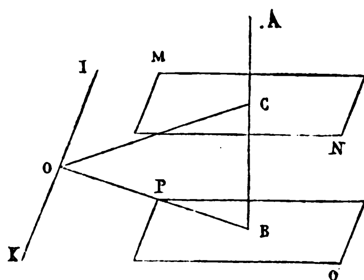


En effet, AB et CD ne peuvent se rencontrer; autrement les plans MN, PQ, dans lesquels elles se trouvent, se rencontreraient; d'ailleurs AB, CD sont dans le même plan RS; ces deux lignes sont donc parallèles.

Théorème.

246. *Deux plans perpendiculaires à la même droite sont parallèles entre eux.*

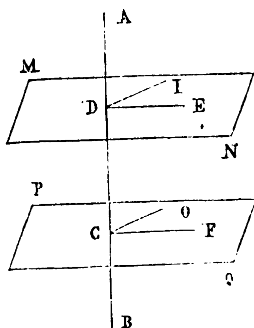
En effet, si les plans MN, PQ n'étaient pas parallèles, ils se rencontreraient suivant une droite IK; joignons un point O de IK aux pieds B et C de BC. Cette ligne BC, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à CO. De même BC est perpendiculaire à OB du plan PQ; il y aurait ainsi deux perpendiculaires menées du point O à la même droite BC, ce qui est impossible; il est donc également impossible que les plans MN, PQ se rencontrent. C. Q. F. D.



Théorème.

247. *Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un* (MN) *est perpendiculaire à l'autre.*

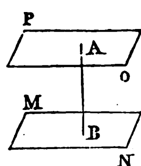
Menons par le pied C de AB, sur le plan PQ, une droite quelconque CO. Les deux lignes AB, CO déterminent un plan qui coupe le plan MN suivant une ligne DI parallèle à CO (nº 245). Dans ce plan ACO, on remarque que AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à DI, et par suite à sa parallèle CO. On démontrerait de même que AB est perpendiculaire à toute autre ligne, ex.: CF, passant par son pied dans le plan PQ; donc AB est perpendiculaire au plan PQ. C. Q. F. D.



Théorème.

248. *Par un point donné dans l'espace on peut mener un plan parallèle à un plan donné, mais on n'en peut mener qu'un.*

Soient A le point donné et MN le plan donné; j'abaisse du point A une perpendiculaire AB sur le plan MN; par le point A je mène un plan PQ perpendiculaire à AB (nº 232); le plan PQ est parallèle à MN (nº 246).



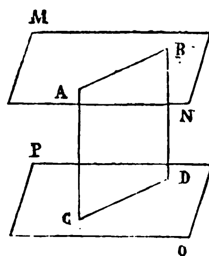
On ne peut mener par le point A deux plans parallèles au plan MN; car ces deux plans seraient tous deux perpendiculaires à la droite AB (nº 247), au même point A; ce qui est impossible.

249. Corollaire. Deux plans M, N, parallèles à un troisième P sont parallèles entre eux; car s'ils se rencontraient, il y aurait, par un même point (de leur intersection), deux plans parallèles à un même plan; ce que nous venons de démontrer impossible.

Théorème.

350. *Deux parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.*

Les parallèles AC, BD déterminent un plan ABCD dont les intersections AB, CD avec MN et PQ sont parallèles. La figure ABCD est donc un parallélogramme, et AC = BD. C. Q. F. D.



Sans changer de figure, supposons que AC, BD soient deux perpendiculaires quelconques aux plans MN, PQ; ces deux lignes étant parallèles, et par suite égales, on conclut de là que :

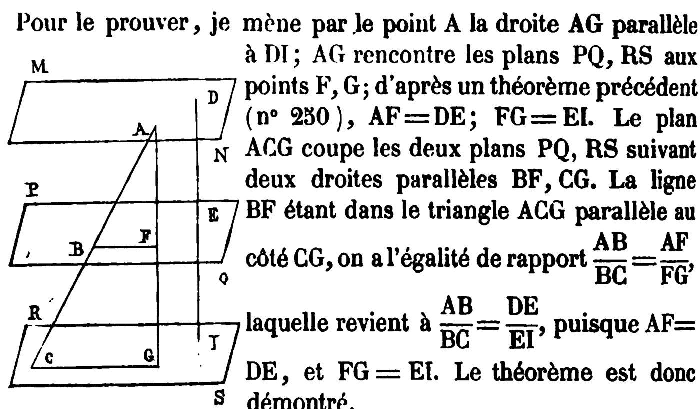
Deux plans parallèles sont partout également distants.

Théorème.

251. *Deux lignes quelconques* (AC, DI) *rencontrées par trois plans parallèles sont divisées en parties proportionnelles.*

On a
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EI}.$$

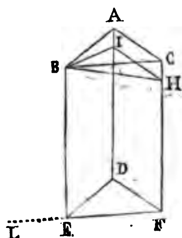
Pour le prouver, je mène par le point A la droite AG parallèle à DI; AG rencontre les plans PQ, RS aux points F, G; d'après un théorème précédent (n° 250), AF = DE; FG = EI. Le plan ACG coupe les deux plans PQ, RS suivant deux droites parallèles BF, CG. La ligne BF étant dans le triangle ACG parallèle au côté CG, on a l'égalité de rapport $\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{FG}$, laquelle revient à $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EI}$, puisque AF = DE, et FG = EI. Le théorème est donc démontré.



Théorème.

252. *Si deux angles* ABC, DEF, *non situés dans le même plan, ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles.*

Je prends BA = ED, et BC = EF, puis je mène les lignes BE, AD, CF, AC, DF. La ligne AB étant égale et parallèle à ED, la figure ABED est un parallélogramme; donc BE est égale et parallèle à AD. De même BC étant égale et parallèle à EF, la figure BCFE est un parallélogramme; donc BE est égale et parallèle à CF. Les deux lignes AD, CF égales et parallèles à une troisième BE sont égales et parallèles l'une à l'autre; il résulte de là que la figure ADCF est un parallélogramme, et AC = DF. Les deux triangles ABC, DEF, ayant les trois côtés égaux, sont égaux; donc l'angle ABC = DEF.



Si on prolongeait FE sur la gauche, on obtiendrait un angle DEL qui aurait toujours ses côtés parallèles à ceux de ABC; cependant cet angle DEL, supplément de DEF, serait également supplément de ABC.

Les angles sont égaux quand ils ont les côtés parallèles et dirigés deux à deux dans le même sens, ou deux à deux en sens contraires.

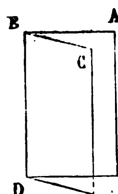
Ils sont supplémentaires dans les autres cas.

Les plans ABC, DEF sont parallèles. En effet, si cela n'était pas, on pourrait toujours mener par le point B un plan BIH parallèle à DEF ; I et H étant les points où ce plan BIH est rencontré par les lignes AD, CF, on aurait DI = BE, FH = BE (parallèles comprises entre plans parallèles) ; mais déjà AD = BE ; on aurait donc DI = AD, ou la partie égale au tout, ce qui est absurde ; on est conduit à cette absurdité en supposant que les plans ABC, DEF ne sont pas parallèles ; cette hypothèse est donc fausse, et ces plans sont parallèles. C. Q. F. D.

DES ANGLES DIÈDRES.

253. Définitions. Quand deux plans se coupent, la figure que forment ces plans limités à leur commune intersection se nomme un *angle dièdre*.

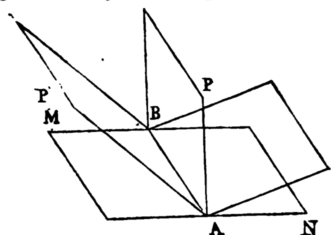
Les deux plans ABD, CBD sont les *faces*, et leur intersection BD est l'*arête* de l'angle dièdre.



Celui-ci se désigne ordinairement par quatre lettres, parmi lesquelles les deux de l'intersection au milieu, les deux autres lettres étant prises sur les deux faces. Ex. : l'angle dièdre ABDC.

Un dièdre peut être désigné par son arête seulement, quand il n'y a pas lieu à confusion ; par exemple quand l'arête indiquée n'appartient qu'à ce seul angle dièdre ; on dit alors le dièdre BD.

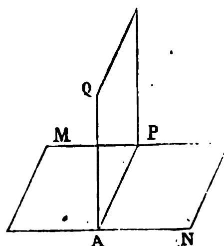
254. La génération d'un angle dièdre est analogue à celle d'un angle rectiligne. Un plan P'AB d'abord coïncidant avec un plan MN, se relève et tourne autour d'une droite AB de ce plan. Un angle dièdre P'ABN se forme et grandit comme l'indique la figure.



Si on considère le plan MN dans toute son étendue des deux côtés de la ligne AB, on remarque que le plan P'AB fait avec ce plan MN deux angles dièdres adjacents généralement inégaux. L'angle de droite P'ABN d'abord le plus petit des deux (position P'AB), augmente progressivement,

et finit par devenir le plus grand (position P″AB). Il est évident que dans l'intervalle les deux angles dièdres ont été une fois égaux (position PAB).

255. Quand un plan PQ fait avec un même plan MN, du même côté de celui-ci, deux angles adjacents égaux, ce plan PQ est *perpendiculaire* au plan MN et les angles dièdres QPAM, QAPN, sont des angles dièdres *droits*.



Les angles dièdres adjacents ou opposés par l'arête jouissent de propriétés analogues à celles des angles rectilignes adjacents ou opposés par le sommet.

Par exemple, *la somme de deux angles dièdres adjacents est égale à deux droits.*

Si un plan PQ *est perpendiculaire au plan* MN, *réciproquement le plan* MN *est perpendiculaire au plan* PQ.

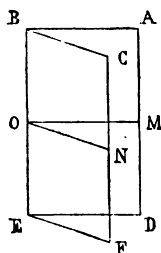
Les angles dièdres opposés par l'arête sont égaux entre eux.

Toutes ces propositions se démontrent comme les théorèmes analogues du Ier livre.

Nous les admettrons comme démontrées.

Mesure des angles dièdres.

256. Pour mesurer les angles dièdres, on s'appuie sur des propositions que nous allons exposer.



Définition. On appelle *angle rectiligne correspondant* à un angle dièdre donné, l'angle formé par deux perpendiculaires à l'arête menées au même point de cette ligne dans les deux faces du dièdre. Ex. : l'angle MON.

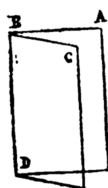
L'angle rectiligne correspondant à un dièdre est le même en quelque point de l'arête qu'on mène les perpendiculaires.

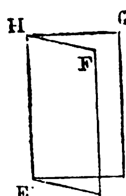
Supposons qu'on en ait mené au point O et au point B, et comparons les angles ABC, MON. Les deux lignes AB, MO perpendiculaires à la même droite BE, dans le même plan ABE, sont parallèles; CB, NO sont parallèles par la même raison; les angles ABC, MON ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens, sont égaux.

Théorème.

257. *A des angles dièdres égaux correspondent des angles rectilignes égaux, et réciproquement.*

1° Soient ABDC, GHEF deux dièdres égaux, auxquels correspondent les angles rectilignes ABC, GHF. Je fais coïncider les deux angles dièdres; pour cela je pose le plan GHE sur ABD, en mettant BD sur HE et le point H en B; cela fait, le plan FHE coïncide de lui-même avec CBD; autrement, l'angle dièdre GHEF serait plus grand ou plus petit que ABDC. Les plans coïncidant et la ligne HE étant sur BD, HG perpendiculaire à HE coïncide avec BA, perpendiculaire à BD; HF coïncide de même avec BC; les angles rectilignes ABC, GHF coïncident et sont égaux.

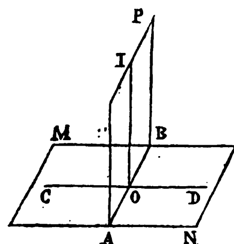




Réciproquement, *quand les angles rectilignes* ABC, GHF, *correspondent à des dièdres* BD, HE, *sont égaux, ces dièdres sont égaux.*

En effet, transportons la figure GHEF sur la figure ABDC, en mettant le plan GHF sur ABC; les angles rectilignes étant égaux pourront coïncider; HG se placera sur AB et HF sur BC; les plans ABC, GHF coïncidant, le point H étant en B, la ligne HE perpendiculaire au plan GHF (n° 229) coïncidera avec la ligne BD perpendiculaire au plan ABC. Cela étant, les plans GHE, ABD, passant par les mêmes droites AB, BD qui se coupent, coïncideront; les plans FHE, CBD de même.

258. Corollaire. *A un angle dièdre droit correspond un angle rectiligne droit, et réciproquement.*



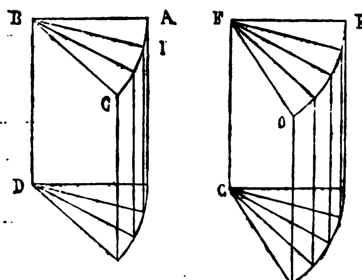
Soit le plan AP perpendiculaire au plan MN (n° 255); menons à l'intersection, AB, une perpendiculaire IO dans le plan AP et une perpendiculaire COD dans le plan MN. Les deux angles dièdres PABN, PABM étant égaux, leurs correspondants rectilignes IOD, IOC sont égaux; ces angles rectilignes sont adjacents dans le plan ICD; donc ils sont droits.

La réciproque est évidente.

Théorème.

259. *En général, deux angles dièdres sont entre eux comme les angles rectilignes correspondants.*

Supposons qu'une commune mesure ABI des angles rectilignes soit contenue trois fois dans ABC et quatre fois dans EFO; par définition, le rapport de ces angles rectilignes,



$$\frac{ABC}{EFO} = \frac{3}{4}.$$

Faisons passer un plan, dans chaque dièdre, par chaque ligne de division de l'angle rectiligne et par l'arête; nous avons ainsi sept angles dièdres, partiels, égaux comme correspondant à des angles rectilignes égaux; il y a trois de ces dièdres dans le dièdre proposé ABDC, quatre dans le dièdre EFCO. Donc $\frac{ABDC}{EFCO} = \frac{3}{4}$; $\frac{ABDC}{EFCO} = \frac{ABC}{EFO}$. C. Q. F. D.

Évidemment cette démonstration s'applique quelle que soit la commune mesure des angles rectilignes ou dièdres; notre théorème est donc vrai en général.

MESURE DES ANGLES DIÈDRES.

260. *Un angle dièdre a pour mesure l'angle rectiligne qui lui correspond.*

Mesurer un angle dièdre, c'est trouver son rapport à l'unité des angles dièdres.

L'unité des angles dièdres est l'angle dièdre droit, comme l'unité des angles rectilignes est l'angle rectiligne droit; nous avons vu que ces deux unités se correspondent (n° 258).

Cela posé, si on considère un dièdre quelconque ABDC et l'angle rectiligne correspondant ABC, on a d'après le théorème précédent:

$$\frac{\text{ABDC}}{\text{1 dièdre droit}} = \frac{\text{ABC}}{\text{1 droit}}.$$

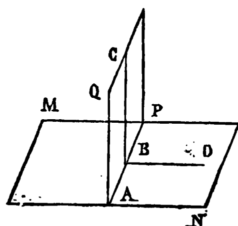
Le nombre qui exprime la mesure de l'angle dièdre est égal à celui qui exprime la mesure de l'angle rectiligne; c'est ce que signifie l'énoncé précédent. Ex.: si l'angle ABC $= \frac{3}{4}$ droit, l'angle dièdre ABDC vaut les 3/4 d'un angle dièdre droit.

REMARQUE. Mesurer un angle dièdre revient à mesurer l'angle rectiligne correspondant; mesurer celui-ci revient à mesurer l'arc de cercle décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés. Mesurer un angle dièdre se réduit donc en définitive à mesurer un arc de cercle.

PLANS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX.

Théorème.

261. *Si une droite* BC *est perpendiculaire au plan* MN, *tout plan mené par cette droite est perpendiculaire au plan* MN.



BC, située dans le plan PQ, est perpendiculaire à l'intersection AP des deux plans (défin.); je mène BD perpendiculaire à AP, dans le plan MN; l'angle CBD mesure l'angle dièdre CAPN des deux plans PQ, MN. Mais cet angle CBD est droit, car CB est perpendiculaire à BD, par définition; donc l'angle dièdre CAPN est droit; les deux plans PQ, MN sont perpendiculaires entre eux. C. Q. F. D.

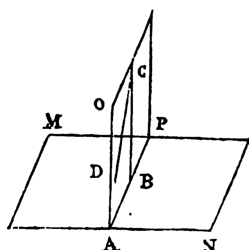
Théorème.

262. *Deux plans* PQ, MN *étant perpendiculaires l'un à l'autre* (figure précédente), *toute perpendiculaire* BC *à l'intersection* AP, *située dans l'un de ces plans* (PQ), *est perpendiculaire à l'autre* MN).

En effet, ayant déjà BC perpendiculaire à l'intersection AP dans le plan PQ, je mène au même point B une perpendiculaire BD à AP, dans le plan MN. L'angle rectiligne CBD correspond au dièdre QAPN; or ce dièdre est droit par hypothèse; l'angle CBD est donc droit; CB est perpendiculaire à BD; mais CB est déjà perpendiculaire à AP par construction; cette ligne CB est donc perpendiculaire au plan MN. C. Q. F. D.

263. Corollaire. *Deux plans* PQ, MN *étant perpendiculaires, si on mène d'un point* C *de l'un* (PQ) *une perpendiculaire à l'autre* (MN), *cette perpendiculaire est dans le plan* PQ.

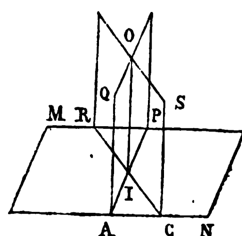
En effet, supposons que cette perpendiculaire soit une ligne CD, non située dans le plan PQ. Menons dans le plan PQ une perpendiculaire CB à l'intersection AP des deux plans; d'après le théorème précédent, cette ligne CB est perpendiculaire au plan MN. Nous aurions donc deux perpendiculaires CB, CD abaissées du même point C sur le plan MN, ce qui est impossible; il est donc également impossible que la perpendiculaire menée du point C sur MN ne soit pas dans le plan PQ; elle est donc dans le plan PQ. C. Q. F. D.



Théorème.

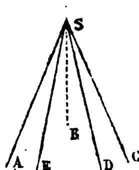
263 bis. *Quand deux plans* PQ, RS *sont perpendiculaires à un même troisième, leur intersection* OI *est perpendiculaire à ce troisième.*

En effet, la perpendiculaire abaissée du point O (de l'intersection) sur le plan MN doit être dans le plan PQ, puisque O est un point de ce plan; pour une raison semblable, cette perpendiculaire doit être dans le plan RS; cette perpendiculaire étant une ligne commune aux deux plans, n'est autre que leur intersection.



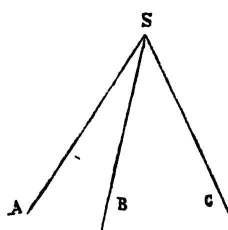
DES ANGLES SOLIDES, TRIÈDRES OU POLYÈDRES.

264. Définitions. On appelle angle *solide* ou *polyèdre* la figure que forment plusieurs plans qui se rencontrent en un point S, limités à leurs intersections consécutives SA, SB, SC,.....



Le point commun S est le sommet de l'angle solide; les intersections SA, SB, SC,..... en sont les *arêtes;* les angles ASB, BSC, CSD, etc., que forment les arêtes, sont les *faces* ou *angles plans* de la figure.

Nous ne considérerons que des angles solides *convexes*, c'est-à-dire tels que dans chacun le plan d'une face, prolongé indéfiniment, laisse toutes les autres faces du même côté.

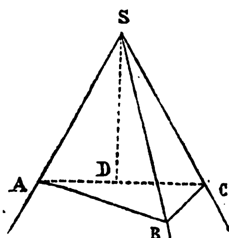


Quand les faces sont au nombre de *trois* seulement, l'angle solide prend le nom d'angle *trièdre*.

Un angle trièdre comprend six parties ou éléments déterminés; ce sont les trois faces ASB, ASC, BSC, et les trois dièdres SA, SB, SC, que celles-ci forment deux à deux.

Théorème.

265. *Dans tout angle solide trièdre, un angle plan quelconque est moindre que la somme des deux autres.*



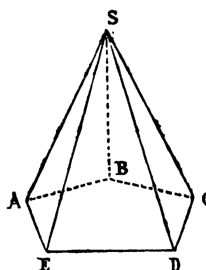
Il n'y a lieu évidemment à démonstration que si une des faces est plus grande que chacune des deux autres. Soit ASC cette plus grande face; je construis dans l'angle ASC l'angle CSD = CSB; dans le même plan ASC, je mène une ligne ADC qui coupe les trois lignes SA, SD, SC; je prends ensuite sur la troisième arête une longueur SB = SD, et je mène les lignes AB, BC. Les deux trian-

gles SCB, SCD ont le côté SC commun, SB = SD par construction ; l'angle CSB = CSD ; ces deux triangles sont donc égaux, et CD = BC. Dans le triangle ABC, on a AC < AB + BC ; ce qui revient à AD + CD < AB + BC ; d'où, en retranchant CD = BC, on conclut AD < AB. Les deux triangles ASD, ASB ont le côté SA commun, SD = SB et le troisième côté AD < AB ; donc, en vertu d'un théorème démontré (livre I, n° 32), l'angle ASD < ASB ; ajoutant d'une part l'angle DSC et de l'autre son égal CSB, on trouve enfin :

$$ASD + DSC \quad \text{ou} \quad ASC < ASB + CSB. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème.

266. *La somme des angles plans d'un angle polyèdre convexe quelconque est moindre que quatre angles droits.*



Je mène un plan qui coupe la surface de l'angle solide suivant le polygone convexe ABCDE. Cela fait, je remarque que l'on a au point A un angle solide trièdre, dans lequel l'un des angles plans

	EAB < SAE + SAB
au point B,	ABC < SBA + SBC
au point C,	BCD < SCB + SCD
au point D,	CDE < SDC + SDE
et enfin en E,	DEA < SED + SEA.

En additionnant ces égalités membres à membres, on trouve, d'une part, la somme des angles du polygone ABCDE, qui vaut $2n^{\text{droits}}$ — 4 droits, si n est le nombre des côtés du polygone (68), et de l'autre la somme des angles à *la base* des triangles, en même nombre n, qui ont le sommet commun S. Cette seconde somme d'angles est égale à $2n^{\text{droits}}$ — S ; ($2n^{\text{droits}}$, la somme de tous les angles des n triangles, moins la somme, S, des angles au

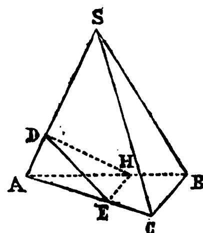
sommet S, qui ne sont autres que les faces de l'angle solide proposé). L'addition faite, on a donc :

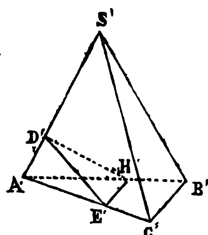
$$2n^{\text{droits}} - 4 \text{ droits} < 2n^{\text{droits}} - S.$$

Pour que l'on ait un reste moindre en retranchant 4 droits de $2n^{\text{droits}}$ qu'en retranchant S de la même grandeur, il faut évidemment que l'on ait 4 droits > S, ou S < 4 droits. C. Q. F. D.

Théorème.

267. *Deux trièdres qui ont les faces égales chacune à chacune, ont leurs dièdres égaux chacun à chacun.*



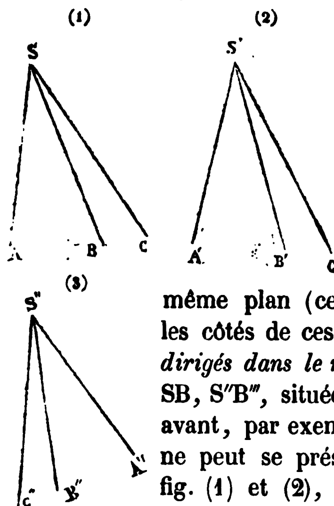


Supposons que l'on ait ASB = A'S'B'; ASC = A'S'C'; BSC = B'S'C'. Prenons, à partir de S et S' les longueurs égales SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C', et menons AB, BC, AC, A'B', A'C', B'C'. Nous formons ainsi quatre triangles d'une part, et quatre de l'autre, qui sont égaux chacun à chacun. Les triangles *isocèles* ASB, A'S'B' sont égaux comme ayant un angle (en S et S') compris entre côtés égaux; de même les triangles *isocèles* ASC, A'S'C'; puis BSC, B'S'C'; enfin les triangles ABC, A'B'C' ont les trois côtés égaux chacun à chacun; AB = A'B' (égalité des triangles ASB, A'S'B'), etc. Cela posé, menons au point D, pris quelconque sur SB, une perpendiculaire DH à cette ligne dans le plan ASB, et une perpendiculaire DE dans le plan ASC; DE et DH (qui rencontrent AB, et AC du côté des angles aigus SAB, SAC), forment l'angle rectiligne EDH correspondant au dièdre SA du premier trièdre proposé. Prenons A'D' = AD et faisons au point D' la même construction qu'au point D, l'angle E'D'H' = dièdre S'A'; il nous faut démontrer que EDH = E'D'H'. En effet, les triangles ADH, A'D'H' sont égaux comme ayant le côté AD = A'D', leurs angles en D et D' droits, l'angle DAH = D'A'H' (égalité des triangles ASB, A'S'B'); donc AH = A'H'; DH = D'H'. De même les triangles

DAE, D'A'E' ont AD = A'D', leurs angles en D et D' égaux, et les angles DAE, D'A'E' égaux ; ces triangles étant égaux, AE = A'E'; DE = D'E'. Les triangles AEH, A'E'H' sont égaux ; car AH = A'H'; AE = A'E', l'angle EAH = E'A'H' (égalité des triangles ABC, A'B'C'); donc EH = E'H'. Enfin les triangles DEH, D'E'H' ayant, d'après ce qui précède, les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux; donc l'angle EDH = E'D'H'; donc dièdre SA = dièdre S'A'. On démontrerait, par des constructions analogues faites sur les arêtes SB, S'B', que le dièdre SB = S'B'; de même SC = S'C'. Notre théorème est donc vrai.

1re REMARQUE. Dans les trièdres qui ont les faces égales et par suite les dièdres égaux, les dièdres égaux sont compris entre des faces égales chacune à chacune.

268. 2e REMARQUE. *Deux trièdres qui ont tous leurs éléments égaux chacun à chacun ne peuvent pas toujours coïncider; il faut que les faces égales des deux figures soient semblablement disposées.*



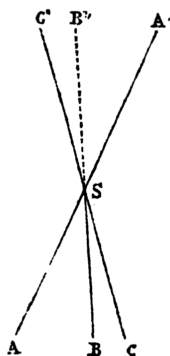
On peut placer les trièdres comme nous l'indiquons ici 1° fig. (1) et (2); 2° fig. (1) et (3). Les faces égales ASC, A'S'C', ou ASC, A''S''C'', sont sur le même plan (celui de la figure, par exemple); les côtés de ces angles parallèles deux à deux, et *dirigés dans le même sens*, les arêtes SB, S'B', ou SB, S''B''', situées du même côté de ce plan (en avant, par exemple). Les trièdres ainsi placés, il ne peut se présenter que deux cas : ou bien, 1° fig. (1) et (2), les faces égales ASB, A'S'B' sont semblablement placées par rapport à ASC, A'S'C' (toutes deux à gauche); ou bien, 2° fig. (1) et (3), tandis que ASB est à gauche de ASC, son égale A''S''B'' est à droite de A''S''C''. Dans le premier cas, les deux trièdres peuvent coïncider; en effet, fig (1) et (2), la face A'S'C' étant mise sur ASC, S'A' sur SA et S'C' sur SC, comme le dièdre SA = S'A', la face A'S'B' s'applique sur ASB, et SB sur S'B'. Dans l'autre cas, au contraire, fig. (1) et (3), si on essaye de faire coïncider les deux trièdres, on est

obligé de placer S″C″ sur SA et S″A″ sur SC; autrement les deux trièdres se trouveraient placés de côtés différents de leur face commune. Mais S″C″ étant sur SA, comme le dièdre S″C″ n'est pas, en général, égal au dièdre SA, la face C″S″B″ ne s'applique pas sur ASB, pas plus que A″S″B″ sur CSB.

3° Remarque. Si la face ASB était égale à BSC, d'où il résulterait dièdre SC = dièdre SA, les deux trièdres ne pourraient manquer de coïncider; il n'y aurait plus à distinguer entre la droite et la gauche.

Théorème.

269. *Si on prolonge les arêtes d'un trièdre* SABC *au delà du sommet, les prolongements déterminent un nouveau trièdre dont toutes les parties sont évidemment égales à celles du trièdre proposé* (angles opposés par le sommet); *néanmoins ces deux trièdres ne peuvent pas coïncider.*



En effet, remarquons d'abord que si ASC est sur le plan de la figure, et SB en avant de ce plan, A″SC″ est sur le plan de la figure, mais SB″ est derrière ce plan, et par suite les faces C″SB″ et A″SB″. Pour faire coïncider les deux trièdres, il faut préalablement ramener en avant le trièdre SA″B″C″, en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice des angles C″SA, A″SC, comme axe. Mais cela fait, les deux trièdres auront évidemment la disposition (1) et (3) (fig. précéd.). Car ASB étant à gauche de ASC, A″SB″ sera à droite; les trièdres ne pourront donc pas coïncider.

Théorème.

270. *Deux trièdres qui ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales chacune à chacune, sont égaux dans toutes leurs parties.*

1° Les trièdres peuvent avoir la disposition (1) et (2) (fig. précédente); alors ils peuvent coïncider comme nous l'avons démontré tout à l'heure; ils sont donc égaux dans toutes leurs parties. Ou bien ils ont la disposition relative (1) et (3); alors ils ne peuvent coïncider; mais si on prolonge les arêtes du trièdre (1), on

obtient un trièdre qui, ramené en avant, aura ses faces disposées comme celles du trièdre (3) et pourra coïncider avec lui. Les deux trièdres proposés (1) et (2) sont donc égaux dans toutes leurs parties.

On démontre de même la proposition suivante : *deux trièdres sont égaux dans toutes leurs parties quand ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun.*

APPENDICE.

Théorème.

271. *Chaque point du plan bissecteur d'un angle dièdre est également distant de ses faces; tout point pris dans l'angle dièdre, ailleurs que sur le plan bissecteur, est inégalement distant des faces.*

Soit M un point du plan EBC, bissecteur du dièdre ABCD; j'abaisse de M les perpendiculaires MI, MH sur les faces ABC, DBC ; il faut prouver que MI = MH. En effet, le plan IMH perpendiculaire aux plans ABC, DBC (261) est perpendiculaire à leur intersection BC, qu'il rencontre en un point O; ses intersections avec les plans ABC, EBC, DBC, sont les droites OH, OM, OI, respectivement perpendiculaires à BC. Les angles rectilignes, HOM, MOI mesurent les angles dièdres égaux ABCE, EBCD; ils sont donc égaux. Les triangles, MOH, MOI, rectangles en I et H sont donc égaux, et MI = MH.

Soit maintenant un point, N, situé hors du plan bissecteur EBC; abaissons les perpendiculaires NI et NP sur les faces DBC, ABC; le plan INP perpendiculaire à ces faces (261), et par suite à leur intersection BC, coupe les trois plans suivant les lignes OI, OM, OP; OM est la bissectrice de l'angle IOP; le point N n'étant pas situé sur cette bissectrice, on a NP < NI (1er livre).

Le plan bissecteur d'un angle dièdre est donc le lieu géométrique des points également distants de ses faces.

Trièdres supplémentaires.

Théorème.

272. *Si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle dièdre on abaisse des perpendiculaires sur les faces, l'angle de ces perpendiculaires est le supplément de l'angle dièdre.*

Si cette proposition est démontrée pour un point M pris dans l'intérieur du dièdre, elle le sera pour tout autre point M′ également pris dans l'intérieur.

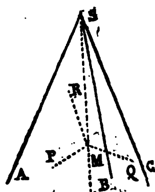
En effet, si de chacun des points M, M′, on abaisse des perpendiculaires sur les faces du dièdre, les angles M et M′, ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens, seront exactement les mêmes.

Cela posé, je prends un point M du plan bissecteur (figure précédente), et j'abaisse les perpendiculaires MH, MI; le plan IMH perpendiculaire aux faces ABC, DBC est perpendiculaire à leur intersection BC; l'angle HOI mesure donc le dièdre ABCD; mais dans le quadrilatère HOIM, qui a deux angles droits, I et H, la somme des deux autres angles HOI + IMH = 2 droits. C. Q. F. D.

Remarque. Le plan IMH coupe le plan bissecteur suivant OM; l'angle IOM = HOM = $\frac{1}{2}$ HOI est aigu; les perpendiculaires MI, MH ne peuvent donc manquer de tomber sur les faces mêmes de l'angle dièdre, et non sur leur prolongement; l'arête BC traverse le plan IMH dans l'intérieur de l'angle IMH.

Théorème.

373. *Si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle solide trièdre* SABC, *on mène des perpendiculaires* MP, MQ, MR *aux faces* ASB, BSC, ASC, *le trièdre* MPQR, *qui a ces perpendiculaires pour arêtes, et le trièdre proposé jouissent des propriétés suivantes : 1° les faces de* MPQR *sont respectivement supplémentaires des angles dièdres de* SABC ; 2° *réciproquement, les faces de* SABC *sont respectivement supplémentaires des dièdres de* MPQR. *A cause de ces propriétés, les deux trièdres sont dits supplémentaires l'un de l'autre.*



Observons d'abord que si on démontre cette proposition pour un point quelconque, M, situé dans l'intérieur du trièdre SABC, elle sera démontrée par tout autre point M′ également situé dans l'intérieur; en effet, si de chacun de ces points on mène des perpendiculaires aux faces de SABC, les deux trièdres M et M′, ayant leurs arêtes parallèles et dirigées dans le même sens, sont égaux dans toutes leurs parties et même superposables. Nous prendrons le point M sur l'intersection, SM, des plans bissecteurs des dièdres SA, SC; ce point M, également distant des trois faces, se trouve en même temps dans le plan bissecteur du dièdre SB. Il résulte de là que chaque perpendiculaire, MP, par exemple, tombe sur la face même ASB du trièdre proposé et non sur le prolongement de cette face; et de plus que chacune des arêtes SA du trièdre SABC traverse la face correspondante PMR de l'autre trièdre dans l'intérieur de l'angle PMR.

1° Cela posé, il résulte du théorème précédent que l'angle PMR est supplément du dièdre SA; l'angle PMQ est supplément du dièdre SB, etc.

2° Le plan PMR perpendiculaire aux plans ASC, ASB est perpendiculaire à leur intersection SA, et réciproquement. De même, SC est perpendiculaire au plan QMR, et SB au plan PMQ. De plus, les perpendiculaires SA, SC tombent, ainsi que nous l'avons remarqué, dans l'intérieur des angles PMR, QMR et non à côté (remarque précédente); le point S est dans l'intérieur du dièdre MR; il

est de même dans l'intérieur du dièdre MQ et dans l'intérieur du dièdre MP. Cela posé, il résulte du théorème précédent que l'angle ASC est le supplément du dièdre MR, BSC est le supplément du dièdre MQ, et ASB supplément de MP. C. Q. F. D.

Si le point S était en dehors d'un de ces dièdres, une des perpendiculaires au moins tomberait sur le prolongement d'une des faces de ce dièdre.

Théorème.

274. *Deux trièdres qui ont leurs dièdres égaux chacun à chacun sont égaux dans toutes leurs parties.*

En effet, soient S et T les deux trièdres proposés; S′ et T′ les trièdres supplémentaires. Les dièdres de T et de S étant égaux chacun à chacun, leurs suppléments, c'est-à-dire les angles plans de S′ et T′ seront égaux chacun à chacun; les trièdres S′ et T′, ayant leurs angles plans égaux chacun à chacun, sont égaux dans toutes leurs parties. Les dièdres de S′ et T′ étant égaux, leurs suppléments, c'est-à-dire les angles plans de S et T sont égaux chacun à chacun.

On démontre de même le théorème suivant :

Deux trièdres qui ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux sont égaux dans toutes leurs parties.

LIVRE VI.

DES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

275. On appelle solide *polyèdre*, ou simplement *polyèdre*, un corps ou solide terminé de toutes parts par des plans ou *faces* planes. Ces plans sont eux-mêmes terminés par des lignes qui sont les *arêtes* ou *côtés* du polyèdre.

Ils forment des angles solides dont les sommets sont dits les *sommets* du polyèdre.

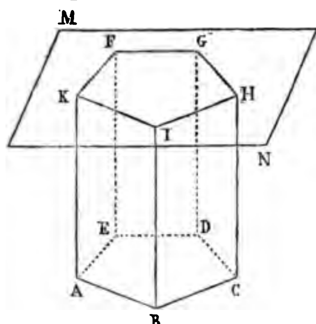
Le plus simple des polyèdres est celui qui n'a que quatre faces, et qu'on nomme *tétraèdre;* il faut, en effet, trois plans au moins pour former un angle solide; ces trois plans laissent un vide qui, pour être fermé, exige un quatrième plan.

On appelle encore en particulier *hexaèdre* le polyèdre qui a six faces, *octaèdre* celui qui en a huit; *dodécaèdre* celui qui en a douze, *icosaèdre* celui qui en a vingt, etc.

Un polyèdre est *régulier* quand toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux entre eux, et que tous ses angles solides sont égaux.

276. Un *prisme* est un solide compris sous plusieurs parallélogrammes terminés de part et d'autre à deux polygones égaux et parallèles.

On peut construire un prisme de la manière suivante : étant donné un polygone quelconque, ABCDE, et un plan parallèle MN, on mène des divers sommets A, B, C autant de droites parallèles AK, EI, CH... à la rencontre du plan MN. Les plans consécutifs ABIK, IBCH,... rencontrent MN suivant des droites KI, IH,... qui forment un polygone KIHGF égal au proposé ABCDE. Ces deux polygones et les parallélogrammes ABIK, IBCH, etc., qui vont de l'un à l'autre, forment le prisme ABCDEKIHGF.



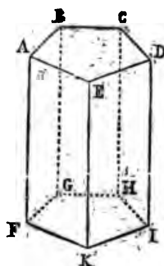
Les deux polygones ABCDE, KIHGF sont les *bases* du prisme; les parallélogrammes ABIH, etc., sont les *pans* du prisme, et en forment la *surface latérale* ou *convexe*.

La *hauteur* d'un prisme est la distance de ses deux *bases*, c'est-à-dire la perpendiculaire menée d'un point de l'une sur l'autre.

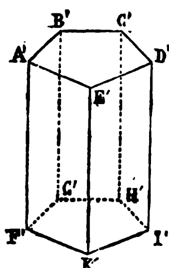
Un prisme est *droit* quand ses arêtes *latérales*, c'est-à-dire celles qui vont d'une base à l'autre, sont perpendiculaires à ces bases; la hauteur du prisme est alors égale à l'une de ses arêtes. Dans tout autre cas, le prisme est *oblique*. Un prisme est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., *polygonal* suivant que ses bases sont des *triangles*, des *quadrilatères*, *des pentagones*, etc., ou en général des polygones quelconques autres que des triangles.

Théorème.

277. *Deux prismes droits qui ont des bases égales et même hauteur sont des figures égales.*

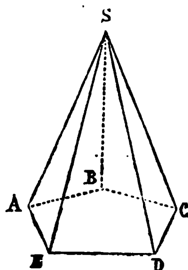


En effet, on peut, en transportant l'une des figures sur l'autre, faire coïncider les bases inférieures FGHIK, F'G'H'I'K'. Ces bases coïncidant, les arêtes latérales FA, F'A'; GB, G'B', etc., coïncident une à une; en effet, FA, F'A', par exemple, partent



alors toutes deux du même point, F, et sont perpendiculaires au même plan. Ces arêtes étant d'ailleurs égales, leurs extrémités supérieures coïncident; les sommets des bases supérieures coïncidant, ces bases coïncident; toutes les faces coïncident.

278. On nomme *pyramide* le solide formé par un polygone ABCDE, et des triangles qui ont un sommet commun, S, et pour bases respectives les côtés de ce polygone.



Le polygone ABCDE est la *base* de la pyramide, les triangles ASB, BSC, etc., en forment la surface *latérale* ou *convexe*, leur sommet commun S est le *sommet* de la pyramide.

La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base.

Une pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, hexagonale, polygonale*, suivant que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *hexagone*, un *polygone quelconque* autre qu'un triangle.

Une pyramide est *régulière* quand sa base est un polygone régulier, et son sommet situé sur la perpendiculaire élevée sur le plan de ce polygone, à son centre.

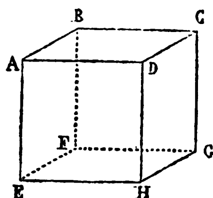
Nous ne considérerons que des polyèdres *convexes*, c'est-à-dire des polyèdres tels que le plan d'une face quelconque, prolongé indéfiniment, laisse toute la figure du même côté (*).

(*) *Deux polyèdres convexes* P *et* P' *qui ont les mêmes sommets, et en même nombre, coïncident dans toute leur étendue.*

En effet, soit ABCDE une face extérieure de P; les sommets A, B, C, D, E appartenant aussi bien à P' qu'à P, le plan ABCDE est une face extérieure de P', ou bien traverse P' laissant des sommets de ce polyèdre d'un côté et des sommets de l'autre. Admettons la dernière hypothèse et supposons que M et N soient deux sommets de ce polyèdre situés de part et d'autre du plan

DES PARALLÉLIPIPÈDES.

279. Un prisme qui a pour bases des parallélogrammes s'appelle un *parallélipipède;* un parallélipipède a six faces qui sont toutes des parallélogrammes.



Un parallélipipède est *droit* quand ses arêtes sont perpendiculaires aux plans des bases.

Si ces bases sont en outre des rectangles, le parallélipipède est dit *rectangle.*

Dans tout autre cas, le parallélipipède est dit *oblique.*

Théorème.

280. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Nous trouvons d'abord les bases ABCD, EFGH (fig. précédente), qui sont, par définition, égales et parallèles. Considérons deux autres faces opposées ABFE, DCGH; elles ont leurs côtés égaux et parallèles deux à deux; AE, DH comme côtés opposés du parallélogramme ADHE, etc. Les angles EAB, HDC, sont égaux comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens; les parallélogrammes ABFE, DCGH peuvent donc coïncider et sont égaux. On démontrerait la même chose pour les faces ADHE, BCGF.

Deux faces opposées quelconques d'un parallélipipède peuvent donc être prises pour BASES.

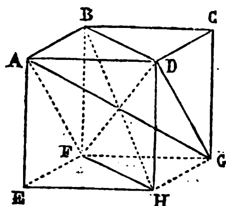
ABCDE. Les sommets M et N appartiennent aussi au polyèdre P; une face ABCDE de ce polyèdre convexe P laisserait donc des sommets d'un côté et des sommets de l'autre, ce qui est contraire à la définition des polyèdres *convexes;* donc ABCDE ne peut être qu'une face extérieure de P'. Chaque face extérieure de P coïncide donc avec une face extérieure de P' et réciproquement; donc ces deux polyèdres coïncident dans toute leur étendue. Nous avons cru utile de démontrer cette proposition; comme il est très-aisé de former des polyèdres non convexes qui, ayant les mêmes sommets et en même nombre, diffèrent essentiellement, il n'est pas évident, *à priori*, que deux polyèdres convexes doivent toujours coïncider dans ce cas.

281. Les arêtes d'un parallélipipède sont égales et parallèles quatre à quatre; si l'on considère les trois arêtes issues d'un même sommet A, qui sont généralement inégales, chacune d'elles est égale et parallèle à trois autres arêtes.

Étant données, à partir d'un point A, trois droites AE, AB, AD, *non situées dans le même plan*, on peut toujours construire un parallélipipède dont les arêtes soient égales et parallèles aux lignes données. Pour cela, on mène par l'extrémité de chacune de ces trois droites un plan parallèle à celui des deux autres; par le point E, un plan FEH parallèle à BAD; par le point B, un plan CBF parallèle au plan AEH; par le point D, le plan CDH parallèle au plan BAE. Les six plans que nous venons de nommer forment, par leurs rencontres mutuelles, le parallélipipède demandé.

Théorème.

282. *Les diagonales d'un parallélipipède se coupent toutes quatre au même point, qui est le milieu de chacune d'elles.*



Considérons d'abord les diagonales BH, DF; ces lignes se terminent, sur la gauche, à l'arête BF, et, à droite, à l'arête DH; tirons BD, FH; les lignes BF, DH étant égales et parallèles, la figure BDHF est un parallélogramme; BH, DF, diagonales de ce parallélogramme, se coupent en leur milieu. Si maintenant nous considérons les diagonales AG, DF, nous voyons qu'elles se terminent, d'un côté à l'arête AD du parallélipipède, de l'autre à l'arête FG; menons les lignes AF, DG; les arêtes AD, FG étant égales et parallèles, la figure ADGF est un parallélogramme; AG, DF, diagonales de ce parallélogramme, se coupent en leur milieu. On prouverait de même que la quatrième diagonale CE du parallélipipède passe au milieu de DF (DF et CE se terminent aux arêtes DC, EF). La proposition est donc démontrée.

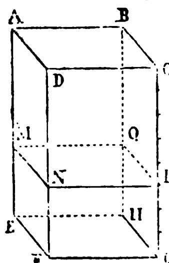
Remarque. Le point O de concours des diagonales d'un parallélipipède est le centre de la figure; chaque ligne qui, passant en ce point, est limitée à la surface, se trouve divisée au point O en deux parties égales.

Les diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales entre elles; le carré de chacune est égale à la somme des carrés des trois arêtes ou *dimensions* du parallélipipède; $\overline{FD}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{FG}^2$. On le démontre aisément.

Mesure des parallélipipèdes.

Théorème.

283. *Deux parallélipipèdes rectangles* ABCDEFGH, MNPQEFGH, *de même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.*



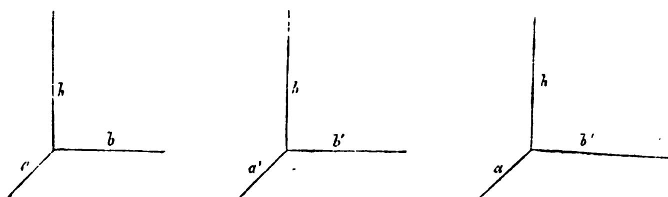
On peut faire coïncider les bases de ces deux parallélipipèdes, qui se trouveront alors disposés comme l'indique notre figure. Pour abréger, nous nommerons le plus petit, EP, et le plus grand, EC. Supposons qu'une commune mesure soit contenue trois fois dans la hauteur EM du premier, et huit fois dans la hauteur EA du second; par définition $\frac{EM}{EA}=\frac{3}{8}$. Par les points de division de EA, imaginons menés des plans parallèles aux bases; ces plans coupent le parallélipipède EC suivant des rectangles égaux à ses bases, et le partagent en huit parallélipipèdes rectangles partiels, évidemment égaux et superposables (n° 277), dont *trois* composent le parallélipipède EP. Un de ces parallélipipèdes partiels étant pris pour commune mesure, il résulte de cette décomposition que le rapport des parallélipipèdes proposés, $\frac{EP}{EC}=\frac{3}{8}$. On a déjà $\frac{EM}{EA}=\frac{3}{8}$; donc $\frac{EP}{EC}=\frac{EM}{EA}$. C. Q. F. D.

Théorème.

284. *Deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Soient P un parallélipipède rectangle, dont nous figurons seulement les trois dimensions (la hauteur, h, et les deux côtés, a et b, de la base); P' un second parallélipipède rectangle, ayant la même hauteur h, et pour côtés de sa base les lignes a' et b'. Les aires des deux bases sont $a\times b$ et $a'\times b'$; il s'agit de démontrer

que $\frac{P}{P'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$. Pour cela, considérons un troisième parallélipipède P'', que l'on peut construire, ayant la hauteur, h, de P et de P',



une seconde dimension, a, commune avec P, et une dimension, b', commune avec P'. Les parallélipipèdes P et P'' ayant des bases égales (les rectangles qui ont les côtés a et h) sont entre eux comme leurs hauteurs correspondantes, b et b'; $\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'}$ (1). De même P'' et P', qui ont des bases égales (les rectangles qui ont les côtés h et b'), sont entre eux comme les hauteurs a et a' correspondant à cette base; $\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'}$ (2). En multipliant les égalités (1) et (2), membre à membre, on trouve, simplification faite,

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème.

285. *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

Soient, P, un parallélipipède rectangle, B sa base, h sa hauteur; P' un second parallélipipède rectangle, B' sa base, h' sa hauteur; il s'agit de prouver que $\frac{P}{P'} = \frac{B \times h}{B' \times h'}$. Pour cela, considérons un troisième parallélipipède P'', que l'on peut construire, ayant même hauteur h que P, et même base B' que P'.

On a d'abord (d'après le n° 284), $\frac{P}{P''}=\frac{B}{B'}$ (1).

Puis (d'après le n° 285), $\frac{P''}{P'}=\frac{h}{h'}$ (2).

En multipliant ces deux égalités, membre à membre, on trouve, après simplification, $\frac{P}{P'}=\frac{B\times h}{B'\times h'}$, C. Q. F. D.

Théorème.

286. *Le volume d'un parallélipipède rectangle quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur; ou, ce qui revient au même, au produit de ses trois dimensions.*

Soient P le parallélipipède à mesurer, B sa base, h sa hauteur; soient C le cube, unité de volume, c sa base, qui n'est autre que le carré, unité de surface, et l sa hauteur, qui est l'unité linéaire. On a, d'après le théorème précédent, $\frac{P}{C}=\frac{B\times h}{c\times l}$, ce qui revient à

$$\frac{P}{C}=\frac{B}{c}\times\frac{h}{l} \quad (1).$$

L'égalité (1) démontre que le nombre, $\frac{P}{C}$, des unités cubiques contenues dans le parallélipipède proposé, est égal au produit du nombre, $\frac{B}{c}$, des unités de surface contenues dans sa base, multipliées par le nombre, $\frac{h}{l}$, des unités linéaires de sa hauteur; autrement dit, que le nombre qui exprime la mesure du parallélipipède est égal au produit des nombres qui expriment sa base et sa hauteur; or c'est ce que signifie l'énoncé ci-dessus.

Si a et b sont les côtés de la base du parallélipipède proposé, comme $B=a\times b$, et $c=l\times l$, on a, en remplaçant B et c par ces valeurs dans l'égalité (1),

$$\frac{P}{C}=\frac{a\times b}{l\times l}\times\frac{h}{l}=\frac{a}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{c}{l} \quad (2).$$

Cette égalité, interprétée comme l'égalité (1), signifie évidemment que *le volume du parallélipipède est égal au produit des nombres qui expriment ses trois dimensions.*

APPLICATION. *Trouver le volume d'un parallélipipède rectangle qui a pour dimensions* $2^{m},5$; $3^{m},8$; et $4^{m},32$.

$$V=2,5\times3,8\times4,32=41^{m.c.},04.$$

287. REMARQUE. On appelle *décimètre cube, centimètre cube,* etc., des cubes qui ont respectivement pour côtés un décimètre, un centimètre; etc.

$$1^{m.\ cube}=1000^{déc.\ cubes}=1000000^{cent.\ cubes}.$$

De sorte que le décimètre cube est un millième, le centimètre cube un millionième de mètre cube, etc.

RÈGLE. Pour énoncer un nombre décimal de mètres cubes, on commence par partager la partie décimale en tranches de trois chiffres, à partir de la virgule; on complète, par un ou deux zéros, la dernière tranche à droite, si elle a moins de trois chiffres. Cela fait, la première tranche après la virgule exprime des décimètres cubes, la seconde des centimètres cubes, etc. Exemple : $41^{m.c.},53270403=41^{m.c.},532.704.030$; lisez 41 mètres cubes, 532 décimètres cubes, 704 centimètres cubes, 30 millimètres cubes.

Si on veut se rendre compte de ce fait : savoir, que $1^{m.\ cube}=1000^{déc.\ cubes}$, il suffit de concevoir le décimètre pris pour unité linéaire, et le décimètre cube pour unité de volume; alors le mètre cube est un parallélipipède dont les trois dimensions sont égales à 10; son volume est donc 10^3 ou 1000 décimètres cubes.

Théorème.

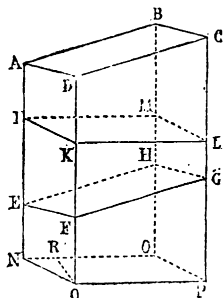
288. *Le volume d'un parallélipipède droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit ABCDEFGH le parallélipipède droit proposé. Je construis le rectangle FKNG équivalent au parallélogramme EFGH (n° 186); puis je mène des perpendiculaires KI, NM au plan EFGH; KI, NM, parallèles à EA et BH, sont dans le plan AEHB et rencontrent AB en I et M; je mène DI, CM. Les lignes ID, FK sont égales et parallèles, parce que IK est égal et parallèle à DF; MC et GN de même; la figure IDCM est donc un rectangle égal à FGNK. J'ai ainsi construit un parallélipipède rectangle, DIMCFGNK, équivalent au parallélipipède proposé ABCDEFGH; en effet, ces deux polyèdres ont une partie commune, le solide IBCDKFGH; les parties non communes sont les prismes triangulaires droits AIDEKF, BMCHNG, qui sont égaux et superposables comme ayant des bases égales HGN, EFK, et des hauteurs égales FD $=$ GC (n° 277) (*). Le volume du parallélipipède droit est donc égal à celui du parallélipipède rectangle, c'est-à-dire à KFGN $\times$ FD (n° 286); mais KFGN $=$ EFGH; le volume du parallélipipède droit est donc égal au produit de sa base EFGH par sa hauteur FD. C. Q. F. D.

Théorème.

289. *Le volume d'un parallélipipède oblique est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit AEHB la base de notre parallélipipède; je prends sur la direction AE une longueur IN $=$ AE, et par les points I, N, je mène deux plans perpendiculaires à la ligne AEN; ces deux plans coupent les faces du parallélipipède proposé, et leurs prolongements, suivant des parallélogrammes IKLM, NOPQ, et déterminent un parallélipipède droit, IKLMNOPQ, qui est équivalent au parallélipipède oblique ABCDEFGH, comme nous allons le démontrer. En effet, les deux polyèdres



(*) Si l'on transporte le prisme BMCHNG sur AIDEFK, en plaçant la base

ont une partie commune, le solide IKLMEFGH, de plus, les parties non communes, ABCDIKLM, EFGHNOPQ, peuvent se superposer; car IN étant égal à AE, IN—IE ou EN=AE—IE ou AI; de même FO=DK, etc.... Cela posé, si l'on fait glisser le solide supérieur, ABCDIKLM, le long des arêtes, jusqu'à ce que sa base IKLM coïncide avec la base égale NOPQ, les arêtes IA, KD, etc..., perpendiculaires à IKLM, coïncident en direction avec NE, OF, etc..., perpendiculaires à NOPQ, et à cause de NE = AI, DK = OF, etc..., A se place en E, le point D en F, etc.; les deux solides ABCDIKLM, EFGHNOPQ coïncident alors dans toute leur étendue; ils sont donc égaux. Les deux parallélipipèdes ABCDEFGH, IKLMNOPQ, composés de parties égales, chacune à chacune, sont équivalents. Mais IKLMNOPQ = NOPQ×IN (n° 288); donc ABCDEFGH=NOPQ×IN=IN×NQ×OR (OR perpendiculaire à NQ). Mais IN=AE; NQ=IM, perpendiculaire à AN et à BQ, est la hauteur même du parallélogramme AEHB; AEHB = AE × IM = IN × NQ; donc ABCDEFGH = AEHB×OR. La proposition énoncée serait donc démontrée, si OR était la hauteur du parallélipipède proposé, correspondant à la base AEHB; or cela est en effet. Le plan NOPQ étant perpendiculaire à la droite AN, est perpendiculaire au plan ANQB (n° 260); dans le plan NOPQ on a mené OR perpendiculaire à l'intersection NQ des deux plans; OR est donc perpendiculaire au plan ANQB (n° 261); comme cette ligne part du plan opposé DOPC, c'est bien la hauteur indiquée du parallélipipède oblique, correspondant à la base AEHB; le volume de ce parallélipipède est donc égal au produit de sa base par sa hauteur (*).

290. Corollaire. Le volume *d'un parallélipipède quelconque est donc égal au produit de sa base par sa hauteur* (nos 286, 288, 289).

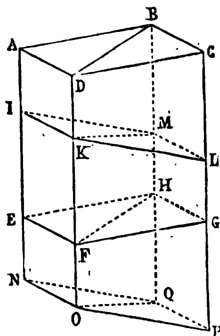
HGN sur son égale EFK, les arêtes HB, GC, NM coïncideront respectivement avec EA, FD, KI; comme ces lignes sont égales, B se placera en A, C en D, M en I.

(*) Si au lieu de AENB on prenait EFGH pour base du parallélipipède, par un point I de FG, et par un point N de son prolongement (IN=FG), on mènerait deux plans perpendiculaires à FG; la démonstration serait la même.

Théorème.

291. *Un prisme triangulaire* ABDEFH *est la moitié du parallélipipède* ABCDEFGH, *de base double et de même hauteur.*

Si le prisme et, par suite, le parallélipipède étaient droits, la proposition serait déjà démontrée; car les deux prismes ABDEFH, DBCFHG ayant des bases égales EFH, FHG et des hauteurs égales, EA = DF, etc., pourraient coïncider (277). Supposons-les obliques, et construisons des prismes droits qui leur soient équivalents; pour cela, nous prendrons sur la direction AE une longueur IN = AE et nous mènerons par les points I et N des plans perpendiculaires à la ligne AEN; ces plans coupent les faces du parallélipipède oblique et leurs prolongements suivant des parallélogrammes IKLM, NOPQ, qui déterminent un parallélipipède droit IKLMNOPQ. Le plan diagonal BDFH, prolongé, divise ce parallélipipède en deux prismes droits égaux, KIMONQ, KMLOPQ; si nous prouvons que les prismes obliques sont équivalents, chacun à chacun, à ces prismes droits, nous aurons démontré que les prismes obliques sont équivalents. Le prisme oblique ABDEFH et le prisme droit IKMNOQ ont une partie commune, le solide IKMEFH; les parties non communes ABDIKM, EFHONQ sont égales et superposables; on le démontre (comme dans le n° précédent) en faisant glisser le solide supérieur le long des lignes AN, DO, BQ, jusqu'à ce que la base IKM coïncide avec son égale NOQ; alors IA est sur son égale NE et le point A se trouve en E; D vient en B et B en H (V. la démonstration précédente); ces deux solides coïncident dans toute leur étendue; le prisme oblique ABDEFH, et le prisme droit KIMONQ, composés de parties égales chacune à chacune, sont équivalents. On démontrerait de même que les prismes BCDHGF, KMLOPQ sont équivalents; les prismes obliques équivalents à des prismes droits égaux entre eux, sont *équivalents*. Chacun d'eux est donc la moitié du parallélipipède, ABCDEFGH, formé par leur réunion. C. Q. F. D.

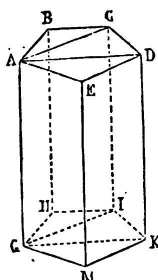


Théorème.

292. *Le volume d'un prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Si le prisme est triangulaire, il est la moitié d'un parallélipipède de même hauteur, h, et de base double. Le volume du parallélipipède étant égal au produit de sa base par sa hauteur, le volume du prisme est égal à la moitié de la base du parallélipipède multipliée par la hauteur, c'est-à-dire, à sa propre base multipliée par sa hauteur.

Considérons maintenant un prisme polygonal ABCDEGHIKM; décomposons sa base en triangles par des lignes issues du même sommet G; les plans AGIC, AGKD décomposent le prisme polygonal en prismes triangulaires, dont chacun a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; si h désigne la hauteur, les trois volumes partiels sont respectivement $HGI \times h$, $GKI \times h$, $GMK \times h$; le volume du prisme ABCDEGHIKM, qui en est la somme, est égal à $h \times (HGI + GKI + GMK) = GHIKM \times h$. C. Q. F. D.

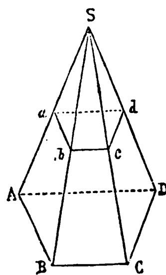


MESURE DES PYRAMIDES.

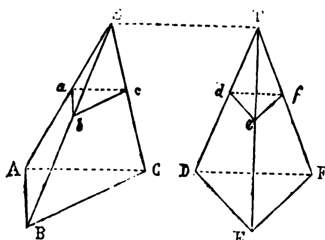
Théorème.

293. *Un plan parallèle à la base d'une pyramide coupe la surface suivant un polygone semblable à la base, et divise les arêtes en parties proportionnelles.*

En effet les lignes AB, ab, intersections de deux plans parallèles par un troisième, sont parallèles; il en est de même de BC, bc; CD, cd; etc. Les deux angles ABC, abc sont égaux comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens; il en est de même de tous les angles des polygones ABCD, $abcd$, comparés deux à deux. Enfin les triangles semblables SAB, sab, d'abord, puis SBC, sbc, etc., donnent les égalités de rapport $\frac{SA}{sa} = \frac{AB}{ab} = \frac{SB}{sb} = \frac{BC}{bc} = \frac{SC}{sc} = \frac{CD}{cd}$, etc.



294. Corollaire. *Dans deux pyramides* SABC, TDEF *de bases équivalentes et de même hauteur, les sections planes, faites à égales distances des bases, sont des polygones équivalents.*

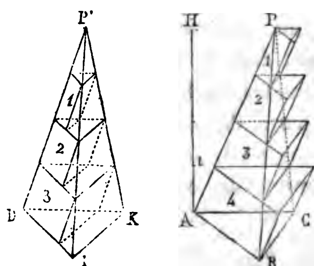


En effet, nous pouvons supposer les bases ABC, DEF, situées sur un même plan; alors les sections *abc*, *def*, équidistantes des bases, sont aussi dans un même plan parallèle au premier; les sommets S et T étant également distants des bases, on peut imaginer un troisième plan parallèle à ces deux là, passant par les sommets S et T; les arêtes, rencontrant ainsi trois plans parallèles, sont divisées par celui du milieu en parties proportionnelles (250); $\frac{SA}{sa}=\frac{TD}{td}$, etc. Les polygones ABC, *abc* étant semblables, on a $\frac{ABC}{abc}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}=\frac{\overline{SA}^2}{\overline{sa}^2}$; de même $\frac{DEF}{def}=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2}=\frac{\overline{TD}^2}{\overline{td}^2}$, mais $\frac{\overline{SA}^2}{\overline{sa}^2}=\frac{\overline{TD}^2}{\overline{td}^2}$; donc $\frac{ABC}{abc}=\frac{DEF}{def}$. Les numérateurs de ces derniers rapports sont égaux par hypothèse; leurs dénominateurs doivent l'être; $abc=def$. C. Q. F. D.

Théorème.

295. *Deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.*

Soient PABC, P'DIK les pyramides proposées que nous désignerons, pour abréger, par P et P'. Supposons que les volumes de ces pyramides ne soient pas égaux, que P surpasse P'. Je divise la hauteur AH en un certain nombre de parties égales, en quatre parties, par exemple, égales à AI. Les pyramides étant disposées de manière que les bases ABC, DIK, soient sur le même



plan, je mène, par les points de division de AH, des plans parallèles à ces bases; chacun de ces plans coupe les pyramides suivant des triangles semblables aux bases et équivalents entre eux (n° 294). Sur ABC, puis successivement sur toutes les sections de la pyramide P, comme *bases inférieures*, je construis des prismes compris entre les plans parallèles consécutifs; (on les construit ainsi : par les sommets B et C de ABC, par ex., on mène des parallèles à AP; ces lignes, situées l'une dans le plan PAB, l'autre dans le plan PAC, rencontrent les premières parallèles à AB, AC, prolongées, en des points que l'on joint l'un à l'autre). Sur chaque section de la pyramide P', comme *base supérieure*, je construis un prisme compris entre cette section et le plan parallèle inférieur. Comme il y a trois sections, j'ai trois prismes intérieurs à la pyramide P', tandis que j'ai construit quatre prismes débordant la pyramide P (ayant employé la base ABC en plus). Les prismes (1) sont équivalents comme ayant des bases équivalentes et même hauteur (n° 292); les prismes (2), *idem;* enfin les prismes (3) de même; le prisme (4) n'a pas d'équivalent. Les prismes construits sur ABC, et les sections de la pyramide P, composent un volume S évidemment plus grand que le volume de cette pyramide. La somme S' des volumes des prismes intérieurs à la pyramide P' est moindre que cette pyramide P'. On a en résumé

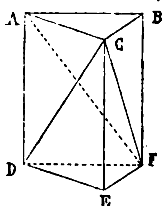
$$S > P > P' > S';$$

donc la différence $P - P'$ doit être moindre que $S - S'$; or la différence des deux sommes des prismes est évidemment le prisme (4), qui a la base ABC et pour hauteur AI; $S - S' = ABC \times AI$; donc $P - P' < ABC \times AI$. Mais on peut diviser la hauteur, AH, en autant de parties égales que l'on veut, par exemple, en cent millions de parties; l'une de ces parties, AI, peut ainsi être rendue aussi petite que l'on veut; elle a pour limite zéro; il en est de même du volume $ABC \times AI$. La différence des deux pyramides P, P', moindre que toutes les valeurs d'une quantité variable qui a pour limite zéro, est évidemment nulle; $P - P' = 0$, ou $P = P'$; C. Q. F. D.

Théorème.

296. *Une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.*

Soit ABCDEF un prisme triangulaire quelconque. Je mène le plan CDF; ce plan décompose le prisme en deux pyramides, l'une triangulaire CDEF, l'autre quadrangulaire CADFB (base ADFB); je mène la diagonale AF de cette base; le plan CAF divise la pyramide quadrangulaire CADFB en deux pyramides triangulaires CABF, CADF. Le prisme se trouve ainsi décomposé en trois pyramides triangulaires CDEF, CABF, CADF.



La première, CDEF, a la base DEF et la hauteur du prisme; la seconde, CABF, si on la considère comme ayant le sommet F, a la base ABC et la hauteur du prisme; ces deux pyramides ayant des bases égales et même hauteur, sont équivalentes; CDEF = CABF. Mais les pyramides CABF, CADF, ayant le sommet commun C, ont des bases égales, ABF, ADF (moitiés d'un parallélogramme), et même hauteur (la distance du point C au plan ABDF); elles sont donc équivalentes; CABF = CADF. En résumé, nous voyons que CDEF = CABF = CADF; les trois pyramides dont se compose le prisme étant équivalentes, l'une d'elles, CDEF, par exemple, est le tiers du prisme. C. Q. F. D.

Théorème.

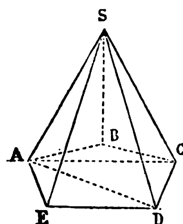
297. *Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.* $V = \frac{1}{3} B \times H$.

Considérons d'abord une pyramide triangulaire; elle est le tiers d'un prisme de même base, B, et de même hauteur, H; or le vo-

(*) Une pyramide triangulaire CDEF étant donnée, on construit aisément un prisme de même base et de même hauteur; il suffit de mener les parallèles DA, FB, à l'arête EC à la rencontre de CA parallèle à ED et de CB parallèle à EF; ce qui produit la figure ci-dessus.

lume de celui-ci est égal à $B \times H$; le volume de la pyramide est donc égal à $\frac{1}{3} B \times H$. C. Q. F. D.

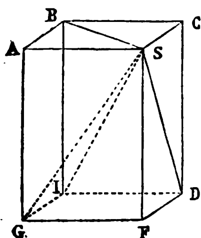
Soit en second lieu une pyramide polygonale SABCDE; je décompose la base en triangles par des diagonales issues du même sommet A; les plans SAC, SAD, conduits par ces diagonales et le sommet S, décomposent la pyramide proposée en pyramides triangulaires SABC, etc... qui ont toutes même hauteur que la pyramide polygonale. Or



$SABC = \frac{1}{3} H \times ABC$; $SACD = \frac{1}{3} H \times CAD$, etc...

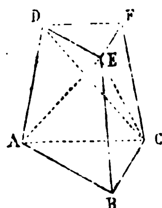
La somme de ces volumes ou la pyramide $SABCDE = \frac{1}{3} H(ABC + CAD + DAE) = \frac{1}{3} H \times ABCDE$. C. Q. F. D.

298. *Mesure d'un polyèdre quelconque.* En joignant un sommet quelconque S d'un polyèdre aux sommets de toutes les faces *qui ne passent pas par ce sommet* S, puis, conduisant des plans par ce point S et les côtés de ces mêmes faces, on décompose ce polyèdre en autant de pyramides qu'il y a de ces faces. Ex. : SABIG, SDFIG, SBCDI. On mesure le volume de chacune de ces pyramides, puis on additionne; la somme de ces volumes est le volume du polyèdre.



Théorème.

299. *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, le tronc qui reste quand on a enlevé la pyramide partielle équivaut à trois pyramides ayant toutes même hauteur que le tronc, et pour base, l'une la grande base,* ABC, *du tronc, l'autre la petite base,* DEF, *et la troisième une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

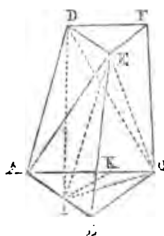


1° Considérons d'abord un tronc de pyramide triangulaire DEFABC. Je mène le plan EDC qui décompose le tronc en deux pyramides, l'une triangulaire EABC, l'autre quadrangulaire EDACF; je mène la diagonale DC du quadrilatère DACF, puis le plan EDC; ce plan décompose la pyramide EDACF en deux pyramides triangulaires EDCF, EDAC. Le tronc est actuellement décomposé en trois pyramides EABC, EDCF, EDAC. La première (sommet E) a la grande base ABC du tronc et même hauteur, H, que celui-ci; la seconde EDCF ou CDEF (sommet C) a la petite base du tronc et même hauteur que lui; ce sont les deux premières pyramides annoncées. Reste la pyramide EDAC qui équivaut à la troisième pyramide annoncée comme nous allons le démontrer (*). Les pyramides EDAC, EDCF ont le sommet commun E, leurs bases DCF, DAC sur le même plan; elles ont même hauteur et sont entre elles comme ces bases.

$$\frac{EDCF}{EDAC} = \frac{DCF}{DAC} = \frac{DF}{AC} \qquad (1)$$

car les triangles DCF, DAC, qui ont des hauteurs égales quand on prend pour bases DF, AC, sont entre eux comme ces bases. Les pyramides EDAC, EABC, ont le sommet commun C, et les bases

(*) On peut, si l'on veut, achever comme il suit pour la troisième pyramide. Par le point E je mène EI parallèle à DA, qui rencontre AB en I; je tire IC, ID. La pyramide EADC est équivalente à la pyramide IADC (même base, ADC, et même hauteur, les sommets E, I étant sur une même parallèle au plan de la base). La pyramide IADC peut être considérée comme ayant le sommet D et la base IAC; elle a même hauteur que le tronc; il reste à prouver que sa base IAC est moyenne proportionnelle entre les bases ABC, DEF. En effet, les triangles IAC, ABC, ont le sommet commun C et leurs bases sur la même droite AB; ils ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases; $\frac{ACB}{AIC} = \frac{AB}{AI}$. Menons IK parallèle à BC; le triangle AIK est égal au triangle DEF; car ces triangles, qui sont équiangles, ont le côté AI = DE; les triangles AIK, AIC ont le



correspondantes EDA, EAB, situées sur le même plan; elles ont même hauteur et sont entre elles comme ces bases.

$$\frac{\text{EDAC}}{\text{EABC}} = \frac{\text{EDA}}{\text{EAB}} = \frac{\text{ED}}{\text{AB}} \qquad (2)$$

car les triangles EAD, EAB, ont des hauteurs égales quand on prend pour bases les côtés ED, AB, et sont entre eux comme ces bases. Mais à cause de la similitude des triangles EDF, ABC, on a $\frac{\text{DF}}{\text{AC}} = \frac{\text{ED}}{\text{AB}}$; donc $\frac{\text{EDCF}}{\text{EDAC}} = \frac{\text{EDAC}}{\text{EABC}}$; ce qui revient à $(\text{EDAC})^2 = \text{EDCF} \times \text{EABC} = \frac{1}{3}\text{H} \times \text{DEF} \times \frac{1}{3}\text{H} \times \text{ABC} = \left(\frac{1}{3}\text{H}\right)^2 \times \text{DEF} \times \text{ABC}$; d'où enfin $\text{EDAC} = \frac{1}{3}\text{H} \times \sqrt{\text{DEF} \times \text{ABC}}$. Ce qui est bien le volume d'une pyramide ayant même hauteur, H, que le tronc et pour base une moyenne géométrique entre les bases du tronc.

2° Considérons maintenant un tronc de pyramide polygonale dont nous désignons les bases par B et b, et la hauteur par H. On peut achever la pyramide de laquelle ce tronc est détaché; puis construire une pyramide triangulaire de même hauteur et dont la base B′ équivalente à B, soit sur le même plan que celle-ci. Le plan qui produit la section b de la première pyramide produit dans l'autre une section équivalente b'. Les deux pyramides entières sont équivalentes comme ayant des bases équivalentes et même hauteur; les deux petites pyramides sont équivalentes par la même raison; donc ces dernières pyramides enlevées, il reste deux troncs équivalents. Mais le tronc de pyramide triangulaire équivaut, d'après 1°, à $\frac{1}{3}\text{H} \times \text{B}' + \frac{1}{3}\text{H} \times b' + \frac{1}{3}\text{H} \times \sqrt{\text{B}'b'}$; le tronc de

---

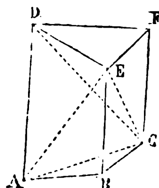
même sommet I et leurs bases sur la même droite; $\frac{\text{AIC}}{\text{AIK}} = \frac{\text{AC}}{\text{AK}}$. Mais à cause de IK parallèle à BC, on a $\frac{\text{AB}}{\text{AI}} = \frac{\text{AC}}{\text{AK}}$; donc $\frac{\text{ACB}}{\text{AIC}} = \frac{\text{AIC}}{\text{AIK}} = \frac{\text{AIC}}{\text{DEF}}$; donc enfin le triangle AIC est moyen proportionnel entre les deux bases ABC, DEF, du tronc de pyramide. La pyramide EDAC équivaut donc à la troisième pyramide annoncée.

pyramide polygonale équivaut à la même somme, et par suite à la somme égale $\frac{1}{3}H\times B+\frac{1}{3}H\times b+\frac{1}{3}H\sqrt{Bb}$. Or cette dernière somme comprend les trois pyramides polygonales dans lesquelles doit, suivant l'énoncé, se décomposer le tronc de pyramide polygonale proposé.

300. Résumé. Si V désigne le volume d'un tronc de pyramides à bases parallèles, H la hauteur, B l'aire de sa grande base et b celle de la petite, on a $V=\frac{1}{3}H\times(B+b+\sqrt{Bb})$.

Théorème.

301. *Un tronc de prisme triangulaire,* DEFABC, *est égal à la somme de trois pyramides triangulaires ayant pour base commune l'une des bases* ABC *du tronc, et pour sommets respectifs les sommets* E, D, F, *de l'autre base.*



Pour le démontrer, je mène le plan EAC qui décompose le tronc de prisme en deux pyramides : l'une triangulaire, EABC, qui a le sommet E et la base ABC (c'est la première pyramide annoncée); l'autre quadrangulaire, EDACF; celle-ci équivaut à la pyramide BADCF, de même base DACF, et de même hauteur, puisque les sommets E et B sont sur une parallèle, EB, à la base commune (*). Je mène la ligne DC, puis le plan BDC; ce plan décompose la pyramide quadrangulaire BDACF en deux pyramides triangulaires BDAC, BDFC. La première, BDAC ou DBAC, a le sommet D et la base ABC; c'est la seconde pyramide annoncée. La dernière pyramide BDFC équivaut à la troisième pyramide annoncée FABC; car ces pyramides, qu'on peut nommer D(BCF), A(BCF), ont même base BCF et même hauteur; car leurs sommets D et A, correspondant à cette base, sont situés sur une même parallèle, DA, au plan de cette base. Le tronc de prisme équivaut donc aux trois pyramides indiquées.

(*) Le lecteur peut mener les lignes BD, BF, que nous concevons sans les dessiner, afin de ne pas surcharger la figure; de même la ligne AF.

APPLICATIONS.

302. PROBLÈME. *Combien y a-t-il d'hectolitres de blé dans un silo, dont la forme est celle d'un parallélipipède rectangle, ayant* $4^{m},56$ *de longueur,* $3^{m},80$ *de largeur, et* $5^{m},48$ *de profondeur.*

L'hectolitre = 100 litres = 100 décimètres cubes = $0^{m.\ cube},1$. La capacité du silo est en mètres cubes, $4,56 \times 3,80 \times 5,48 = 94^{m.\ c.},95744$ (n° 286). Le silo contient 949 hectolitres, 57 litres, 44 centilitres.

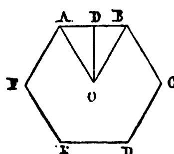
Problème.

On demande le poids d'une pierre taillée en forme de parallélipipède rectangle, ayant pour dimensions $1^{m},24$; $0^{m},8$ *et* $0^{m},64$, *le poids spécifique de la pierre étant* 2,5.

Le poids spécifique de la pierre est 2,5, cela signifie que 1 centimètre cube de cette matière pèse $2^{grammes},5$; évaluons donc le volume en centimètres cubes. Si on prend le centimètre pour unité, les dimensions de la pierre sont 124; 80 et 64; son volume est égal à $124 \times 80 \times 64$ centimètres cubes = 634880 cent. cubes. Le poids en est donc égal à $2^{g},5 \times 634880 = 1587200$ grammes = $1587^{kilogr.},200$.

Problème.

On demande ce que pèse un cristal de chaux carbonatée, en forme de prisme hexaèdre régulier, dont la hauteur est sextuple du côté de la base; ce côté a $0^{m},006$ *de longueur, et le poids spécifique de la chaux carbonatée est* 2,7.



La base du prisme est un hexagone régulier dont le côté $AB = 0^{m},006$, ou en centimètres 0,6; l'apothème $OD = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AD}^2}$; AD moitié de AB = 0,3; $OD = \sqrt{\overline{0,6}^2 - (0,3)^2} = \sqrt{0,36 - 0,09} = \sqrt{0,27} = 0,519$ à moins de 0,001. La surface de l'hexagone est $6AB \times \frac{1}{2} OD = 3AB \times OD =$

$1,8 \times 0,519$. L'arête de l'hexaèdre est égale à $0,6 \times 6 = 3,6$; son volume est égal à $1,8 \times 0,519 \times 3,6$; l'unité de longueur étant le centimètre, son poids est égal à $2^{gr},7 \times 1,8 \times 0,519 \times 4,2$, ce qui fait $9^{gr},080$ à moins de 0,001.

Problème.

Combien vaut une pyramide régulière d'argent massif au titre de 0,840, *dont la base est un hexagone régulier et la hauteur quadruple du côté de la base. La densité de la matière est* 9,8; *le kilogramme d'argent, au titre de* 0,900, *vaut* $198^f,50$, *et le côté de la base est* 0,6 *centimètres.*

On cherche d'abord le poids de la pyramide, qui est égal à son volume multiplié par la densité de la matière. Or $V = \frac{H}{3} \times B$.

On connaît $\frac{H}{3} = \frac{0,6 \times 4}{3} = 0,8$; on évalue l'aire de la base comme dans le problème précédent $B = 1,8 \times 0,519$; d'où $V = 0,8 \times 1,8 \times 0,519$. Le poids en grammes est égal à $0,8 \times 1,8 \times 0,519 \times 9,8$. Enfin le gramme d'argent, au titre de 0,900, valant $0^f,19850$, le gramme d'argent, au titre de 0,001, vaudra $\frac{0^f,19850}{900}$; et au titre de 0,840, $\frac{0^f,19840 \times 840}{900}$. Le prix cherché est donc $\frac{0,8 \times 1,8 \times 0,519 \times 9,8 \times 0,19850 \times 840}{900}$.

Problème.

Calculer le volume et la surface latérale d'un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur est $12^m,5$, *et dont les bases sont des carrés ayant respectivement pour côtés* 3,60 *et* 0,80.

Le volume cherché est égal à

$$\frac{12,5}{3} \times \left(\overline{3,60}^2 + \overline{0,80}^2 + 0,80 \times 3,60\right) \quad (\text{n}^\text{o}\ 300).$$

La surface latérale se compose de 4 trapèzes égaux dont nous

connaissons les bases. La hauteur d'un de ces trapèzes joint les milieux des deux bases ; si on mène, par l'extrémité supérieure de cette hauteur, une parallèle à la hauteur du tronc, on forme un triangle rectangle dont le petit côté est la différence, $\frac{3,60}{2} - \frac{0,80}{2} = 1,40$, des apothèmes des bases, dont l'hypoténuse est la hauteur cherchée, h, du trapèze, et l'autre côté de l'angle droit est égal à la hauteur 12,5 du tronc ; de sorte que $h = \sqrt{(12,5)^2 + (1,40)^2}$. Connaissant la hauteur d'un des trapèzes et ses bases, on calculera facilement sa surface.

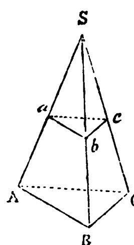
DES POLYÈDRES SEMBLABLES.

303. Nous appellerons polyèdres *semblables* des polyèdres compris sous un même nombre de faces, semblables chacune à chacune, et dont les angles solides homologues sont égaux. (Les angles solides homologues sont ceux qui sont formés par les faces semblables.)

Les sommets des angles solides homologues sont les *sommets homologues* des deux polyèdres. On nomme *droites homologues* les lignes qui, dans les deux figures, joignent les sommets homologues.

Théorème.

304. *Si l'on coupe une pyramide* SABC *par un plan, abc, parallèle à la base, on détermine une nouvelle pyramide semblable à la première.*



En effet, la face SAB est semblable à S*ab* (*ab* parallèle à AB) ; de même SAC est semblable à S*ac* ; SBC semblable à S*bc* ; enfin les faces ABC, *abc*, sont évidemment équiangles et semblables (n° 293).

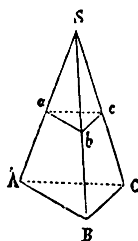
De plus, les angles solides homologues sont égaux chacun à chacun ; car S est commun ; ensuite deux autres quelconques homologues, ex. : A et *a*, sont évidemment composés d'angles plans égaux et semblablement disposés. Les deux

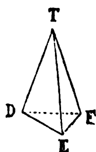
pyramides ayant leurs faces semblables chacune à chacune, et leurs angles solides homologues égaux, sont semblables.

REMARQUE. Les arêtes homologues de nos deux pyramides sont proportionnelles : $\frac{SA}{Sa} = \frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb} = \frac{BC}{bc}$, etc...

Théorème.

305. *Deux tétraèdres* SABC, TDEF, *qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement placées, sont semblables.*





Pour le démontrer, je prends sur SA une longueur $Sa = TD$, et je mène le plan abc parallèle à SABC; j'obtiens ainsi un tétraèdre $Sabc$ semblable à SABC. Si je démontre que le tétraèdre TDEF est égal à $Sabc$, j'aurai démontré que TDEF est semblable à SABC. Comparons donc $Sabc$, TDEF; $Sa = TD$; l'angle $aSb = TDE$; $Sab = SAB = TDE$ (similitude des faces SAB, TDE); les triangles Sab, TDE sont donc égaux; les triangles Sac, TDF de même. Cela posé, pour faire coïncider les pyramides TDEF, $Sabc$, mettons la face TDF sur son égale Sac; le dièdre TD étant égal au dièdre Sa, le plan TDE s'appliquera sur le plan Sab; la ligne TD étant déjà sur Sa, TE tombera sur son égale Sb et le point E se placera en b. Cela étant, les sommets des deux tétraèdres TDEF, $Sabc$ coïncident, et par suite toutes leurs faces; ces deux tétraèdres sont donc égaux; donc TDEF est semblable à SABC. C. Q. F. D.

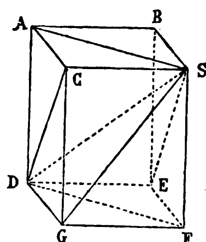
Il y a divers cas de similitude des tétraèdres analogues aux cas de similitude des triangles. Ils se démontrent comme le précédent.

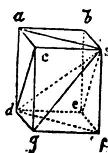
Théorème.

306. *Deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

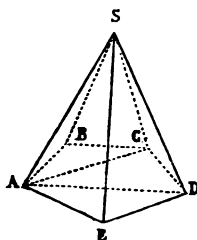
Pour plus de netteté dans la figure, nous représentons deux pa-

rallélipipèdes semblables; mais nous ferons le raisonnement comme si c'étaient deux polyèdres semblables quelconques. On peut joindre le sommet S de l'un des polyèdres aux sommets de toutes les faces qui ne passent pas par ce sommet S; ces lignes SA, SC, SD, etc... sont les arêtes de pyramides polygonales, ayant toutes le sommet S, et pour bases ces faces non adjacentes à S; ex.: les pyramides SADGC, SDEFG, SABED (*); On peut ensuite décomposer chacune de ces pyramides polygonales en tétraèdres, en partageant sa base en triangles; on obtient ainsi des tétraèdres comme SDEF, SDGF; le polyèdre ABCSDEFG est ainsi décomposé en un certain nombre de tétraèdres. Soit *s* le sommet du second polyèdre, homologue à S; on peut décomposer de la même manière le polyèdre, *abcsdefg*, en tétraèdres homologues à ceux qui composent le premier polyèdre; on détermine ces tétraèdres en menant dans le second polyèdre les lignes homologues à celles que nous avons menées dans le premier; *sa*, *sc*, *sd*, etc... puis *dc*, *df*, etc... Il nous faut maintenant démontrer que les tétraèdres homologues des deux polyèdres sont semblables chacun à chacun.

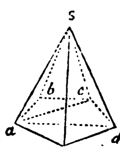




1° Si l'on considère deux pyramides polygonales homologues quelconques de ces polyèdres, il suffit de démontrer la similitude de deux tétraèdres homologues de ces pyramides, pour conclure la similitude de tous les autres. Considérons, par exemple, des pyramides SABCD, *sabcd*, ayant les bases semblables comme celles de nos deux polyèdres; supposons que les tétraèdres SABC, *sabc*, aient été reconnus semblables, et comparons les tétraèdres adjacents SACD, *sacd;* le dièdre



(*) Ces pyramides sont distinctes les unes des autres; car le plan SDG, par exemple, correspondant à l'intersection de deux faces, ADGC, EDGF laisse entièrement d'un côté la pyramide SADGC, et de l'autre SDGEF.



SACD = dièdre *sacd* (supplémentaires des dièdres égaux SACB, *sacb*); la face SAC est semblable à *sac* (similitude des tétraèdres SABC, *sabc*); la face ACD est semblable à *acd* (similitude des bases ABCDE, *abcde*); les deux tétraèdres SACD, *sacd* ont donc un dièdre égal compris entre des faces semblables et semblablement disposées; donc ils sont semblables. On démontre exactement de même la similitude des tétraèdres suivants SADE, *sade;* et ainsi de suite s'il y en avait plus de trois dans chaque pyramide polygonale.

2° Considérons dans le premier polyèdre une pyramide polygonale, SDEFG, *dont la base soit adjacente à l'une des faces qui passent par le sommet* S, et comparons-la à son homologue *sdefg* de l'autre polyèdre. Commençons par les tétraèdres SDEF, *sdef*, *dans lesquels se trouvent les dièdres* EF, *ef ef des polyèdres;* dièdre EF = dièdre *ef* (par définition); la face SEF est semblable à *sef;* le triangle DEF est semblable à *def* (similitude des faces des deux polyèdres); les deux tétraèdres SDEF, *sdef* sont donc semblables; donc les autres tétraèdres des pyramides polygonales SDEFG, *sdefg*, sont semblables (d'après 1°).

3° Considérons maintenant deux pyramides polygonales SACGD, *sacgd*, *respectivement adjacentes à deux pyramides* SDEFG, *sdefg déjà considérées et composées de tétraèdres semblables.*

Considérons, dans ces pyramides, les tétraèdres SCDG, *scdg*, respectivement adjacents aux tétraèdres SDFG, *sdfg*, déjà reconnus semblables; à cause de la similitude de ces derniers tétraèdres, la face SDG est semblable à *sdg;* le dièdre SDGF est égal au dièdre *sdgf;* en retranchant ces dièdres des dièdres homologues égaux CDGF, *cdgf*, des deux polyèdres, il reste deux dièdres égaux SDGC, *sdgc;* les faces CDG, *cdg* sont d'ailleurs semblables comme triangles homologues des faces semblables ADGC, *adgc;* les deux tétraèdres SCDG, *scdg* ont un angle dièdre égal, SDGC = *sdgc*, compris entre des faces semblables et semblablement disposées; ils sont donc semblables. Les autres tétraèdres homologues des pyramides polygonales SACGD, *sacgd*, sont donc semblables (1°).

Notre proposition est actuellement démontrée; les tétraèdres homologues des deux polyèdres proposés sont semblables chacun à chacun. Car, ayant commencé par comparer deux pyramides

polygonales dont les bases sont adjacentes à celles qui passent par le sommet S, on peut comparer ensuite les pyramides homologues adjacentes à celles-là, puis des pyramides adjacentes aux précédentes, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait considéré, de proche en proche, toutes les pyramides polygonales des deux polyèdres.

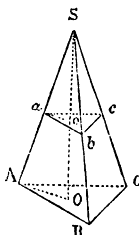
Remarque. Dans la décomposition précédente, on peut choisir pour sommets des tétraèdres deux sommets homologues quelconques des deux polyèdres.

Les droites homologues de deux polyèdres semblables sont donc proportionnelles, les arêtes comme les diagonales.

Théorème.

307. *Les volumes de deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.*

1° Nous allons d'abord le prouver pour deux pyramides semblables. En prenant, sur l'arête SA de la plus grande pyramide, une longueur Sa égale à l'arête homologue de la plus petite, et menant le plan abc parallèle à la base, on obtient, comme nous l'avons vu (n° 305), une pyramide égale à la seconde pyramide proposée. En abaissant SO perpendiculaire à ABC, nous avons sur la même direction les hauteurs SO, So des deux pyramides.



$$\text{SABC} = \frac{1}{3}\,\text{ABC} \times \text{SO}; \qquad \text{S}abc = \frac{1}{3}\,abc \times \text{S}o.$$

Les triangles ABC, abc étant semblables, $\frac{\text{ABC}}{abc} = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\overline{ab}^2}$; mais $\frac{\overline{\text{AB}}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{\text{SA}}^2}{\overline{\text{S}a}^2}$; donc $\frac{\text{ABC}}{abc} = \frac{\overline{\text{SA}}^2}{\overline{\text{S}a}^2}$ (1); d'un autre côté, les triangles SAO, Sao étant semblables (ao est parallèle à AO), on a l'égalité $\frac{\text{SO}}{\text{S}o} = \frac{\text{SA}}{\text{S}a}$ (2). En multipliant les égalités (1) et (2), membre à membre, puis les deux termes du premier rapport obtenu

par $\frac{1}{3}$, on obtient l'égalité $\frac{\frac{1}{3}\,\mathrm{ABC}\times \mathrm{SO}}{\frac{1}{3}\,abc\times \mathrm{S}o}=\frac{\overline{\mathrm{SA}}^3}{\overline{\mathrm{S}a}^3}$ ou $\frac{\mathrm{SABC}}{\mathrm{S}abc}=\frac{\overline{\mathrm{SA}}^3}{\overline{\mathrm{S}a}^3}$. C. Q. F. D.

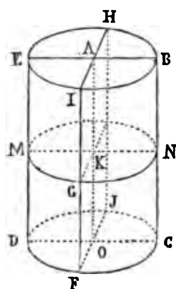
2° Considérons maintenant deux polyèdres semblables P et p; ils peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, T, t; T_1, t_1; T_2, t_2; T_3, t_3, etc., les arêtes homologues des polyèdres étant A, a; A_1, a_1; A_2, a_2, etc. On a, d'après 1°, $\frac{\mathrm{T}}{t}=\frac{\mathrm{A}^3}{a^3}$; $\frac{\mathrm{T}_1}{t_1}=\frac{\mathrm{A}_1^3}{a_1^3}$; $\frac{\mathrm{T}_2}{t_2}=\frac{\mathrm{A}_2^3}{a_2^3}$, etc. Les arêtes homologues des deux tétraèdres étant proportionnelles, il en est de même de leurs cubes; $\frac{\mathrm{A}^3}{a^3}=\frac{\mathrm{A}_1^3}{a_1^3}=\frac{\mathrm{A}_2^3}{a_2^3}$, etc.; donc $\frac{\mathrm{T}}{t}=\frac{\mathrm{T}_1}{t_1}=\frac{\mathrm{T}_2}{t_2}=\frac{\mathrm{T}_3}{t_3}$; d'où on déduit $\frac{\mathrm{T}+\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3}{t+t_1+t_2+t_3}=\frac{\mathrm{T}}{t}=\frac{\mathrm{A}^3}{a^3}$ ou $\frac{\mathrm{P}}{p}=\frac{\mathrm{A}^3}{a^3}$; C. Q. F. D.

LIVRE VII.

LES TROIS CORPS RONDS.

DU CYLINDRE.

308. Définitions. On appelle *cylindre* le solide produit par la révolution d'un rectangle ABCD qu'on imagine tourner autour d'un de ses côtés, AO, qui reste fixe.



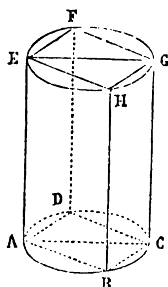
Dans ce mouvement, les côtés AB, OC, toujours perpendiculaires à l'axe, décrivent des cercles CFD, BIE qu'on nomme *bases* du cylindre (233); la ligne BC, appelée *génératrice*, en décrit *la surface latérale.*

La ligne fixe AO est *l'axe* ou la *hauteur* du cylindre.

Toute section plane faite suivant l'axe est un rectangle double du rectangle générateur; ex. : IFJH.

Toute section, MGN, faite par un plan perpendiculaire à l'axe, est un cercle égal à chacune des bases; en effet, ce plan coupe le rectangle générateur suivant une ligne KN; dans le mouvement de ce rectangle autour de AO, cette ligne KN décrit, sans quitter le plan perpendiculaire, un cercle égal à cercle OC, puisque KN = OC (233).

309. Supposons qu'ayant inscrit dans la base d'un cylindre un polygone ABCD, on construise, sur ce polygone comme base, un prisme droit de même hauteur que le cylindre; les arêtes AE, BH, etc., de ce prisme, perpendiculaires aux bases, sont autant de positions de la génératrice mobile; elles sont donc situées sur la surface. Ce prisme, qui a la position indiquée, est dit *inscrit* dans le cylindre; le cylindre est *circonscrit* au prisme.



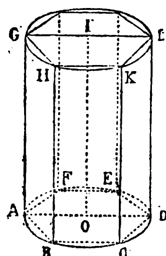
Si le nombre des côtés du polygone inscrit augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits, les faces latérales du prisme deviennent infiniment petites; la surface latérale du prisme, composée de ces faces, se rapproche indéfiniment de celle du cylindre, jusqu'à en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée. En d'autres termes :

310. On admet comme évident que *la surface latérale du cylindre est la limite de la surface d'un prisme inscrit dont le nombre des faces croît indéfiniment, ces faces devenant infiniment petites; le volume du cylindre est la limite du volume du même prisme.*

Théorème.

311. *Le volume d'un cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Inscrivons dans la base du cylindre un polygone régulier, et construisons un prisme inscrit qui ait pour base ce polygone et même hauteur OI $=$ H que ce cylindre. Le volume de ce prisme est égal au produit de sa base que nous désignerons par B, par la hauteur H; $V = B \times H$ (1).



Supposons maintenant que le nombre des côtés du polygone, et par suite le nombre des faces du prisme, augmentent indéfiniment, ces côtés et ces faces devenant infiniment petits, le volume du prisme tend vers une limite qui est le volume du cylindre (310), tandis que la base du polygone tend vers sa limite qui est le cercle;

la hauteur $IO = H$ ne varie pas. L'égalité (1), toujours vraie, quel que soit le nombre des côtés du polygone, devient à la limite :

$$\text{vol. cyl.} = \text{cercle } OD \times H; \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Si R désigne le rayon de la base d'un cylindre et H la hauteur, on a vol. cyl. $= \pi R^2 \times H$.

Théorème.

312. *La surface latérale d'un cylindre a pour mesure la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur* H.

Pour le prouver, inscrivons dans la base du cylindre un polygone régulier, et construisons un prisme inscrit qui ait ce polygone *pour base* (*fig.* précédente). La surface latérale de ce prisme est un assemblage de rectangles égaux, dont l'un HBCK a pour mesure $BC \times BH$ ou $BC \times IO$; la somme de ces rectangles ou la

$$\text{surface latérale du prisme} = 6BC \times IO = \text{périm. } ABCDEF \times IO \ (1).$$

Supposons maintenant que le nombre des côtés du polygone inscrit, et par suite le nombre des faces latérales du prisme, augmentent indéfiniment, ces côtés et ces faces devenant infiniment petits; la surface latérale de ce prisme tend vers une limite qui est la surface latérale du cylindre, tandis que le périmètre du polygone tend vers sa limite qui est circ. OD; la hauteur IO ne change pas. L'égalité (1), toujours vraie, quel que soit le nombre des côtés du polygone, devient à la limite

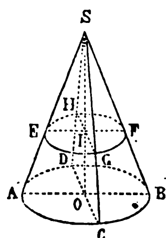
$$\text{surface latérale du cylindre} = \text{circ. } OD \times IO; \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Si on désigne OD par R et la hauteur IO par H, il vient

$$\text{surf. lat. cyl.} = \text{circ. } R \times H = 2\pi R \times H.$$

DU CÔNE.

313. Définitions. On appelle cône le solide produit par la révolution d'un triangle rectangle SOB qu'on imagine tourner autour d'un des côtés SO de l'angle droit.



Dans ce mouvement, le côté OB décrit un cercle BCAD qu'on appelle la *base* du cône; l'hypoténuse SB en décrit *la surface latérale.*

Le point S est le *sommet* du cône, SO l'*axe* ou la *hauteur*, SB le *côté* ou l'*apothème*, et quelquefois *la génératrice de la surface conique.*

Toute section plane faite dans un cône suivant l'axe est un *triangle isocèle*, SCD, double du triangle générateur SOB = SOC.

En effet, le plan coupe la base suivant un diamètre COD, et la surface latérale suivant deux génératrices SC, SD.

Toute section, FGEH, faite dans le cône par un plan perpendiculaire à l'axe, est un *cercle.*

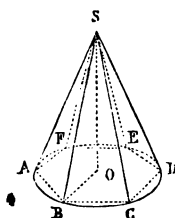
En effet, ce plan coupe le triangle générateur SOB suivant une ligne IF perpendiculaire à SO; quand SOB tourne pour produire le cône, IF, en tournant dans le plan sécant, décrit un cercle (233) qui est l'intersection du cône et du plan.

314. Si du cône SACB on retranche, par une section parallèle à la base, le cône SEGF, le solide restant EGFHACBD est ce qu'on appelle un *cône tronqué*, ou *tronc de cône* à bases parallèles.

Le tronc de cône peut être considéré comme décrit par la révolution du trapèze IOBF, dont les angles I et O sont droits, autour de son côté IO. Cette ligne IO se nomme l'*axe* ou la *hauteur* du tronc de cône; FB en est le côté; les deux cercles EGF, ACB en sont les *bases.*

315. Deux cônes sont *semblables* quand leurs axes sont entre eux comme les diamètres de leurs bases; les cônes SACB, SEGF sont semblables.

316. Si dans le cercle ABCD, qui sert de base à un cône, on inscrit un polygone ABCDEF, puis, que sur cette base ABCDE, on construise une pyramide ayant pour sommet le point S, cette pyramide, dont les arêtes SA, SB, SC, etc., appartiennent évidemment à la surface du cône, est dite *inscrite* dans le cône; celui-ci est *circonscrit* à la pyramide.



379. Si le nombre des côtés du polygone augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits, les faces de la pyramide deviennent elles-mêmes infiniment petites. La surface latérale de la pyramide, composée de ces faces, se rapproche de la surface du cône jusqu'à en différer infiniment peu.

On admet comme évident que *la surface latérale du cône est la limite de la surface latérale d'une pyramide inscrite, dont le nombre des faces augmente indéfiniment, ces faces devenant infiniment petites;* et aussi que *le volume du cône est la limite du volume de la même pyramide.*

Théorème.

317. *Le volume d'un cône est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Inscrivons dans la base du cône un polygone régulier (figure précédente), et construisons la pyramide SABCDEF qui a ce polygone pour base et le point S pour sommet. Le volume de cette pyramide est égal au tiers du produit de sa base B par sa hauteur H, qui n'est autre que SO;

$$V = ABCDEF \times \frac{H}{3} \qquad (1).$$

Supposons maintenant que l'on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone inscrit, et par suite le nombre des faces de la pyramide. Le volume de celle-ci tend vers une limite qui est le volume du cône, tandis que le polygone qui lui sert de base tend vers sa limite qui est le cercle; la hauteur $SO = H$ est tou-

jours la même. Soit $OB = R$. L'égalité (1), toujours vraie, quel que soit le nombre des côtés du polygone inscrit, devient à la limite :

$$\text{vol. cône} = \text{cercle } R \times \frac{H}{3}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

ou

$$\text{vol. cône} = \frac{1}{3}\pi R^2 \times H.$$

Corollaire. *Les cônes d'égale hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

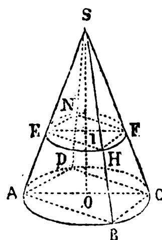
Les cônes de bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs.

Les cônes semblables sont entre eux comme les cubes des diamètres de leurs bases, ou comme les cubes de leurs hauteurs.

Théorème.

318. *Le volume du cône tronqué dont les rayons de base sont* $OC = R$ *et* $EF = r$, *et la hauteur* $IO = H$, *est égal à* $\frac{1}{3}\pi . H . (R^2 + r^2 + Rr)$.

Inscrivons dans la grande base du cône un polygone régulier ABCD, et construisons la pyramide inscrite SABCD ; le plan de la base supérieure du tronc de cône coupe la pyramide suivant un polygone EHFN semblable à ABCD, et détermine un tronc de pyramide polygonal dont le volume



$$V = \frac{1}{3} H \times \left(B + b + \sqrt{B \times b}\right) \quad (1),$$

B étant l'aire du polygone ABCD et b celle de EHFN (n° 300). Imaginons maintenant que le nombre des côtés du polygone inscrit dans chacune des bases du tronc de cône, et par suite le nombre des faces du tronc de pyramide inscrit, augmentent indéfiniment, ces côtés et ces faces devenant infiniment petits. Le volume du tronc de pyramide tend vers une limite qui est le volume du tronc de cône, tandis que l'aire de chaque polygone tend vers

sa limite qui est le cercle circonscrit. La hauteur IO = H ne change pas. L'égalité (1), toujours vraie, quel que soit le nombre des côtés des polygones inscrits, devient à la limite :

$$\text{vol. tronc de cône} = \frac{1}{3} H \times (\text{cercle}\, R + \text{cercle}\, r + \sqrt{\text{cercle}\, R \times \text{cercle}\, r}),$$

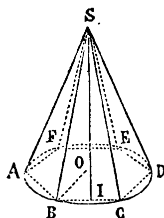
ou $$\text{vol. tronc de cône} = \frac{1}{3} \pi . H (R^2 + r^2 + Rr). \quad \text{C. Q. F. D}$$

Théorème.

319. *La surface latérale d'une pyramide régulière* SABCDEF *est égale au périmètre de sa base, multiplié par la moitié de son apothème* SI.

(L'apothème est la perpendiculaire menée du sommet de la pyramide sur un côté quelconque de la base.)

En effet, l'un des triangles isocèles, SBC, qui composent cette surface latérale a pour aire le produit de sa base, BC, multipliée par la moitié de sa hauteur, SI; $SBC = BC \times \frac{1}{2} SI$. La surface latérale tout entière, composée de 6 triangles, est égale à $6BC \times \frac{SI}{2}$; ce qui est bien le périmètre de la base multiplié par la moitié de l'apothème.



Théorème.

320. *La surface latérale d'un cône est égale à la circonférence de sa base multipliée par la moitié de son côté.*

Inscrivons dans la base du cône (fig. précéd.) un polygone régulier ABCDEF, et construisons la pyramide inscrite SABCDEF. La surface latérale de cette pyramide

$$S = \text{périm. ABCDEF} \times \frac{SI}{2}.$$

Imaginons maintenant que le nombre des côtés du polygone,

et par suite le nombre des faces de la pyramide, augmentent indéfiniment, ces côtés et ces faces devenant infiniment petits; la surface latérale de la pyramide inscrite tend vers une limite qui est la surface latérale du cône, tandis que son apothème tend vers une limite qui est le côté SB du cône, et le périmètre de sa base vers la circonférence du cercle. L'égalité (1), toujours vraie, devient à la limite

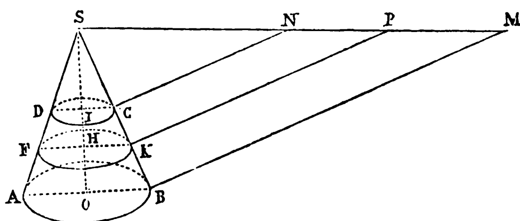
$$\text{surf. lat. du cône} = \text{circ. R} \times \frac{A}{2} = 2\pi R \times \frac{A}{2} = \pi R \times A. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(R désigne le rayon de la base, et A la longueur du côté ou l'arète, SB, du cône.)

Théorème.

321. *La surface latérale d'un tronc de cône* ABCD *a pour mesure son côté* CB *multiplié par la demi-somme des circonférences de ses bases.*

Dans le plan SAB, qui passe par l'axe SO, je mène BM perpendiculaire au côté SB, et je prends BM égale à la longueur de la circonférence OB; par le point C je mène CN parallèle à BM; je dis que CN = circ. IC. ou 2π.IC. En effet, les triangles SOB, SIC étant semblables, on a l'égalité $\frac{OB}{CI} = \frac{SB}{SC}$; les triangles SBM, SCN étant semblables, on a $\frac{BM}{CN} = \frac{SB}{SC}$; donc $\frac{OB}{CI} = \frac{BM}{CN}$; d'où $\frac{2\pi.OB}{2\pi.CI} = \frac{BM}{CN}$; mais BM = 2π.OB, donc CN = 2π.CI. Cela posé, comme surface latérale du cône SAB = $2\pi.OB \times \frac{SB}{2}$, et surf. triangle SBM = BM $\times \frac{SB}{2}$,



on a surf. cône SAB $=$ triangle SBM ; on démontre de même que surf. cône SCD $=$ triangle SCN ; donc la différence entre les surfaces coniques, ou la surface latérale du tronc de cône, est égale à la différence des surfaces des triangles, c'est-à-dire à l'aire du trapèze CBMN.

Or trapèze CBMN $= CB \times \frac{1}{2}(BM + CN)$, ce qui équivaut à $CB \times \frac{1}{2}$ (circ. OB + circ. CI) ; donc

$$\text{surf. tronc de cône} = CB \times \frac{(\text{circ. OB} + \text{circ. CI})}{2}.$$

Par le milieu de CB, menons KP parallèle à BM, et concevons par le même point K un plan parallèle aux bases du tronc de cône ; KP $=$ circ. KH. On sait que l'aire du trapèze a aussi pour expression KP $\times$ CB (n° 190) ; donc la surface du tronc de cône est aussi égale à KP $\times$ CB $=$ CB $\times$ circ. KH.

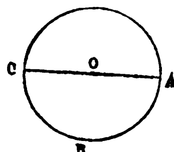
La surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure son côté multiplié par la circonférence de la section parallèle aux bases, équidistante de ces bases.

322. Remarque. Si A est le côté du tronc, R et r les rayons de ses bases, *surface tronc de cône* $= \pi . A . (R + r)$.

Errata. Page 201, n° 317, ligne 21, lisez : *par le tiers de sa hauteur.*

DE LA SPHÈRE.

323. Définition. La *sphère* est un solide terminé par une surface courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur nommé *centre*.



On peut regarder la sphère comme produite par la révolution d'un demi-cercle ABC tournant autour de son diamètre AC ; la surface décrite dans ce mouvement par la demi-circonférence a en effet tous ses points également distincts du centre O, qui reste fixe.

On appelle *rayon* de la sphère toute droite qui va du centre à un point de la surface, ex. : OA ; *diamètre*, une droite qui joint deux points de la surface en passant par le centre, ex. : AC.

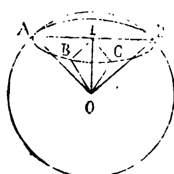
Tous les *rayons* de la sphère sont égaux ; tous les diamètres sont égaux et doubles du rayon.

Un plan est *tangent* à la sphère quand il n'a qu'un point de commun avec sa surface.

Théorème.

324. *Toute section de la sphère, faite par un plan, est un cercle.*

Soit ABCD l'intersection de la sphère, O, par un plan. J'abaisse du centre une perpendiculaire OI sur ce plan ; je joins le pied I de cette perpendiculaire à divers points A, B, C, D du contour de la section ; enfin, je mène les rayons OA, OB, etc. Les triangles OIB, OIA, rectangles en I, ont l'hypoténuse OA = OB (rayons de la sphère), le côté OI commun ; donc ils sont égaux et IA = IB. On démontre de même que IB = IC = ID. La section ABCD de la sphère, faite par un plan, est donc un cercle dont le centre est en I, au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur ce plan.



325. Remarques. Quand la section ne passe pas par le centre de la sphère, son rayon est moindre que le rayon de la sphère, et d'autant moindre que le plan sécant est plus éloigné du centre. (V. le triangle rectangle OIA, et discutez l'égalité $R^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2$, ou $R^2 = d^2 + r^2$.) De toutes les sections planes de la sphère, les plus grandes sont celles qui passent par le centre de la sphère ; car chacune d'elles a pour rayon le rayon de la sphère (OI ou $d = o$, $r = R$).

D'après cela, on nomme *grands cercles* de la sphère ceux qui passent par le centre de la sphère, et *petits cercles* ceux qui ne passent pas par ce centre.

Les plans de deux grands cercles se coupent suivant un diamètre ; leurs circonférences se divisent donc mutuellement en deux parties égales.

326. *Par deux points* A *et* B *de la surface d'une sphère, qui ne sont pas diamétralement opposés, on ne peut faire passer qu'un*

grand cercle. En effet, par ces deux points et par le centre O, on peut mener un plan, mais on n'en peut mener qu'un.

Supposons les deux points A et C (nº 323) situés à l'extrémité d'un diamètre; par la ligne droite AOC on peut faire passer une infinité de plans qui coupent tous la sphère suivant des grands cercles.

Mais il faut trois points sur la surface d'une sphère pour déterminer un petit cercle.

Théorème.

327. *Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon de la sphère est tangent à celle-ci.*

Je joins un point quelconque, B, du plan au centre O de la sphère; l'oblique OB est plus longue que la perpendiculaire OA. Tout point B du plan, autre que le point A, se trouvant à une distance du centre plus grande que le rayon, OA, est situé hors de la sphère. Le plan MN, n'ayant que le point A commun avec la sphère, est *tangent* à celle-ci.

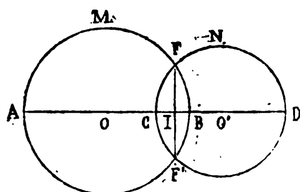
Réciproquement, *tout plan tangent est perpendiculaire au rayon qui va au point de contact.* En effet, supposons le plan MN tangent à la sphère au point A; joignons le centre à un autre point B quelconque de ce plan. La ligne OB qui sort de la sphère est plus longue que le rayon OA; OA étant la plus courte ligne que l'on puisse mener du point O sur le plan MN, est la perpendiculaire menée de O sur ce plan.

Corollaire. *Par un point donné sur la sphère, on ne lui peut mener qu'un seul plan tangent.* Car si on en pouvait mener deux, il y aurait deux plans perpendiculaires à un rayon au même point.

Théorème.

328. *L'intersection de deux sphères est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne qui joint leurs centres, et dont le centre est sur cette ligne.*

Imaginons un plan qui passe par la ligne des centres, OO'; ce plan coupe les deux sphères suivant deux grands cercles AMB, CND. On peut maintenant supposer les deux sphères engendrées par la révolution des deux demi-cercles AMB, CND qui tourneraient simultanément autour de la ligne AOO'D. Dans ce mouvement, le point F reste constamment commun aux deux lignes mobiles, et c'est le seul qui leur soit commun; la ligne que décrit ce point F est évidemment la ligne suivant laquelle se coupent les surfaces des deux sphères. Or cette courbe est plane, puisque la ligne FI ne cesse pas, en tournant, d'être perpendiculaire à l'axe AD (n° 233); et c'est une circonférence, puisque toutes les positions du point mobile sont à la même distance, IF, du point I. L'intersection des deux sphères est donc une circonférence de rayon IF, dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres, OO', et dont le centre I est sur cette ligne. C. Q. F. D.

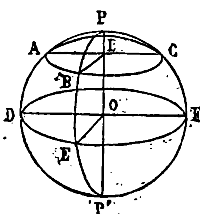


329. Remarque. En considérant deux circonférences dans les diverses positions relatives indiquées n° 102, livre II, et les faisant tourner autour de la ligne des centres, on obtient des sphères dont les positions relatives sont tout à fait analogues à celles des circonférences. Les relations entre leurs rayons et la distance des centres sont donc, suivant les cas, exactement les mêmes que pour les circonférences.

Deux sphères sont dites *tangentes* quand elles n'ont qu'un point de commun. Ce point, qui se trouve sur la ligne des centres, se nomme *point de contact*.

330. Des pôles. On nomme pôle d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de ce cercle.

331. *Tous les points de la circonférence d'un cercle de la sphère sont également distants de chacun des pôles* P, P' *de ce cercle.*



En effet, les droites PA, PB, PC, etc., qui joignent le pôle P aux divers points de la circonférence ABC, sont des obliques égales; car elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire PI. (IA = IB = IC). On a de même P'A = P'B = P'C.

Les arcs de grands cercles PA, PB, PC, etc., qui passent par le pôle P d'un cercle ABC et les divers points de sa circonférence, sont égaux, puisque leurs cordes sont égales. Si on considère un grand cercle DEF dont les pôles sont P et P′, on peut remarquer, à cause de $PO = OP'$, que l'arc $PD = P'D$; PDP′ étant une demi-circonférence, l'arc PD est un quadrant.

Les arcs de grands cercles, qui vont du pôle d'un grand cercle aux divers points de sa circonférence, sont des quadrants.

Pour un petit cercle, à cause de $PI < IP'$, l'arc $AP < AP'$. AP n'est pas un quadrant, AP′ non plus.

332. Remarque. Si les arcs qui joignent un point P de la sphère à deux points d'un arc de grand cercle, DEF, sont des quadrants, ce point P est le pôle de DEF.

En effet, si on tire OD, OE, on voit que les angles POD, POE sont droits; donc P est l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan du cercle DEF; c'est un des pôles de ce cercle.

333. Les propriétés des pôles permettent de tracer, sur une sphère, des arcs de petits cercles ou de grands cercles avec la même facilité qu'on trace des circonférences sur un plan.

On emploie à cet effet un compas, appelé *compas sphérique*, disposé de telle sorte que ses pointes peuvent être inclinées l'une vers l'autre sous un angle quelconque. L'une de ces pointes étant maintenue fixe au point P de la surface d'une sphère (*fig.* précéd.), l'autre, posée d'abord au point A, décrit, en tournant sur cette surface, une circonférence de cercle. En effet, on peut concevoir une seconde sphère dont le centre serait le point P et le rayon PA; tous les points de la courbe ABC appartiennent à la surface de cette seconde sphère; cette courbe ABC est donc l'intersection de la sphère proposée et de cette sphère PA; ABC est donc une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire au rayon OP, dont le centre est sur cette ligne, et qui a le point P pour pôle (n° 328).

On a vu que l'arc de grand cercle qui va du pôle d'un grand cercle à sa circonférence, est un quadrant, et qu'il n'en est ainsi que pour les grands cercles.

Pour décrire un grand cercle, d'un point donné P de la sphère comme pôle, il suffit donc de donner au compas sphérique une

ouverture égale à la corde d'un quadrant de grand cercle. Pour connaître cette corde, il faut connaître le rayon de la sphère.

Problème.

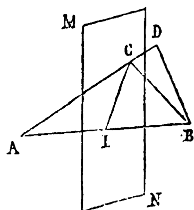
334. *Etant donnée une sphère solide, construire son rayon.*

On prend deux points, A, B, à volonté, sur la surface de la sphère; du point A comme pôle avec une ouverture de compas sphérique quelconque, on décrit un arc de cercle; du point B avec la même ouverture de compas, un second arc de cercle qui coupe le premier en D. On répète deux fois la même construction en changeant d'ouverture de compas; ce qui fournit deux autres points E, F, dont chacun est, comme le point D, également distant des points A et B. Cela fait, on mesure avec le compas sphérique les trois distances rectilignes DE, DF, EF; on construit, sur un plan, un triangle ayant ces trois longueurs pour côtés; enfin on détermine le rayon du cercle circonscrit à ce triangle; ce rayon O'D est celui de la sphère.

En effet, les points D, E, F, également distants des points A et B, appartiennent au plan perpendiculaire à la ligne AB en son milieu (*); ce plan passe par le centre O de la sphère (point éga-

(*) Théorème. *Le lieu géométrique de tous les points de l'espace également distants de deux points* A, B *est le plan* MN *perpendiculaire à la ligne* AB, *en son milieu* C.

1° *Tout point* C *du plan* MN *est également distant de* A *et* B; CA = CB. En effet, tirons CI; AB perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à CI; donc CA=CB (obliques s'écartant également du pied de la perpenduculaire).



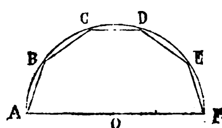
2° *Tout point* D, *situé en dehors du plan* MN, *est inégalement distant de* A *et* B. L'une des lignes DA, DB, rencontre le plan MN en un point C; tirons CB; on a CB=CA; puis DB < DC + CB, ou DB < DC+ CA, ou DB< DA. C. Q. F. D.

Tout les points de l'espace également distants de A et de B sont donc sur le plan MN.

lement distant de A, B); il coupe donc la surface de la sphère suivant une circonférence de grand cercle, sur laquelle se trouvent les points D, E, F. Le triangle que formeraient les droites DE, DF, EF, intérieures à la sphère, est donc inscrit dans un grand cercle; c'est ce grand cercle que nous construisons sur un plan.

MESURE DE LA SURFACE ET DU VOLUME DE LA SPHÈRE.

335. Inscrivons dans un demi-cercle un demi-polygone ABCD, et faisons tourner la figure autour du diamètre AF, comme axe. Tandis que la demi-circonférence décrit la surface d'une sphère, le contour polygonal décrit une surface courbe, que nous appellerons *surface polygonale*, à cause de la nature de sa génératrice. Quand le nombre des côtés du contour polygonal augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits, à mesure que le contour polygonal se rapproche de la circonférence, la surface polygonale se rapproche de la surface sphérique. On admet comme évident que, si le nombre des côtés du contour polygonal devenait suffisamment grand, la différence entre la surface polygonale et celle de la sphère serait moindre qu'une quantité donnée. En d'autres termes :



336. Définition. *La surface d'une sphère est la limite vers laquelle tend la surface décrite par une ligne polygonale inscrite dans un demi-cercle, qui fait une révolution autour d'un de ses diamètres, quand le nombre des côtés de cette ligne polygonale augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits.*

Dans cette révolution du demi-cercle autour de son diamètre, AF, le demi-polygone engendre un certain solide que nous appellerons, pour abréger, *solide polygonal*. Si le nombre des côtés augmente indéfiniment, le volume de ce solide polygonal se rapproche de celui de la sphère. Les mêmes considérations que précédemment conduisent à cette définition :

337. *Le volume d'une sphère est la limite vers laquelle tend le volume engendré par un demi-polygone inscrit dans un demi-cercle qui fait une révolution autour de son diamètre comme axe.*

Nous sommes donc conduits à chercher la mesure de la surface

polygonale et du volume polygonal dont nous venons d'indiquer la génération.

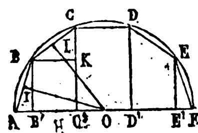
Pour plus de simplicité, nous supposerons que les côtés du contour polygonal *sont égaux entre eux;* ce contour est alors ce qu'on appelle *une ligne polygonale régulière.* Afin de pouvoir mesurer certaines *parties* de la surface de la sphère, nous mesurerons la surface engendrée par un nombre quelconque de cordes inscrites égales entre elles; de même pour le volume.

Théorème.

338. *La surface engendrée par la révolution d'une ligne polygonale régulière tournant autour d'un diamètre,* AF, *du cercle circonscrit, est égale à la circonférence du cercle inscrit,* circ. OI, *multipliée par la projection de la ligne polygonale sur l'axe.*

Ex. : surface ABCDE $=$ circ. OI $\times$ AE'.

Les côtés de la ligne polygonale, quel qu'en soit le nombre, ne peuvent avoir que l'une de ces positions : *être adjacents à l'axe,* comme AB; *non adjacents à l'axe, sans lui être parallèles,* comme BC; *parallèles à l'axe,* comme CD. Nous allons déterminer la surface engendrée par un côté dans chacune de ces positions.



1° La surface décrite par AB, que nous appellerons surf. AB, est celle du cône engendré par la révolution du triangle rectangle ABB' autour de AB'; on a donc (n° 320),

$$\text{surf. AB} = 2\pi.\text{BB}' \times \frac{\text{AB}}{2}. = 2\pi\text{BB}' \times \text{AI}. \qquad (1)$$

Cela posé, observons que les triangles rectangles, ABB', OIA, ayant un angle aigu, A, commun, sont semblables; on déduit de là l'égalité de rapports $\frac{\text{BB}'}{\text{OI}} = \frac{\text{AB}'}{\text{AI}}$; d'où on tire $\text{BB}' \times \text{AI} = \text{OI} \times \text{AB}'$; remplaçant dans l'égalité (1) $\text{BB}' \times \text{AI}$ par $\text{OI} \times \text{AB}'$, on trouve

$$\text{surf. AB} = 2\pi\text{OI} \times \text{AB}',$$

c'est-à-dire la surface du cercle inscrit multipliée par la projection, AB′, de la ligne AB sur l'axe.

2° La surface décrite par BC est celle du tronc de cône engendré par la révolution du trapèze BCC′B′ autour de B′C′; le point I est le milieu de BC; on a donc (n° 321),

$$\text{surf. BC} = 2\pi \,.\, \text{IH} \times \text{BC} \ (*). \qquad (2)$$

Cela posé, après avoir mené BK, parallèle et égale à B′C′, nous remarquons que les triangles BCK, OIH sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires; d'où on déduit l'égalité de rapports $\frac{BC}{OI} = \frac{BK}{IH}$; d'où résulte $BC \times IH = OI \times BK = OI \times B'C'$. Si nous remplaçons dans l'égalité (2) $BC \times IH$ par $OI \times B'C'$, nous trouvons surf. $BC = 2\pi OI \times B'C'$; ce qui est bien la mesure annoncée.

3° Considérons la surface décrite par le côté CD parallèle à l'axe; c'est la surface du cylindre engendré par la révolution du rectangle CDD′C′ autour de C′D′; on sait que cette surface, surf. $CD = 2\pi CC' \times C'D' = 2\pi OI \times C'D'$; ce qui est encore la surface annoncée.

La surface décrite par un côté, quelle que soit sa position par rapport à l'axe, est donc égale à la circonférence du cercle inscrit multipliée par la projection de ce côté sur l'axe. Si on ajoute les surfaces décrites par différents côtés, lesquelles sont absolument distinctes les unes des autres, on arrive au même résultat. Ex. : surf. BCDE = circ. $OI \,.\, (B'C' + C'D' + D'E') =$ circ. $OI \times B'E'$; c'est-à-dire la circonférence du cercle inscrit multipliée par la projection sur l'axe de la ligne polygonale génératrice. C. Q. F. D.

Théorème.

339. *La surface d'une sphère est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles multipliée par son diamètre*

$$\text{surf. sphère} = \text{circ. R} \times 2\text{R}.$$

(*) Rétablissez sur la figure la ligne IH, perpendiculaire menée de I sur B′C′, qui a été omise.

En effet, inscrivons dans le demi-cercle ACF qui engendre la sphère (*fig.* précédente), un demi-polygone régulier quelconque, ABCDEF. Nous savons que la surface décrite par ABCDEF,

$$\text{surf. ABCDEF} = 2\pi OI \times AF. \qquad (1)$$

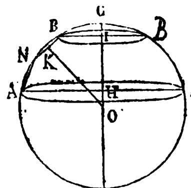
Imaginons que le nombre des côtés du demi-polygone augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits; on sait qu'alors la surface engendrée par le contour du demi-polygone tend vers une limite qui est la surface de la sphère, tandis que le rayon du cercle inscrit tend vers le rayon, R, de la sphère qui est sa limite; la projection AF de la ligne polygonale reste la même; AF = 2R. L'égalité (1), constamment vraie, quel que soit le nombre des côtés du demi-polygone, devient à la limite

$$\text{surf. sph.} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2.$$

340. Remarques. *La surface d'une sphère ast égale à quatre grands cercles.*

Soit $D = 2R$ le diamètre de la sphère; $D^2 = 4R^2$; d'où surface sphère $= \pi D^2$. *La surface d'une sphère est égale à celle d'un cercle qui aurait pour rayon le diamètre de cette sphère.*

341. De la zone. on appelle *zone* la partie de la surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles. Les deux cercles, cercle BI et cercle AH, qui comprennent une zone, sont les *bases* de cette zone; la distance IH de ces deux bases est la *hauteur* de cette zone.



L'un des plans parallèles qui comprennent une zone peut être tangent à la sphère, au point C, par exemple. Alors la zone est dite *à une base;* ex.: zone ACA′ et zone BCB′; c'est ce qu'on nomme quelquefois une *calotte sphérique.*

La zone est la surface que décrit l'arc AB en faisant une révolution autour de l'axe IH.

Théorème.

342. *La surface d'une zone est égale au produit d'une circonférence de grand cercle multipliée par la hauteur de cette zone;*

$$\text{surf. zone AB} = 2\pi R \times IH\,;\ (OC = R).$$

En effet, imaginons qu'on inscrive dans l'arc AB une ligne polygonale régulière ANB; surf. ANB$=2\pi OK \times IH$. (1) (n° 338).

Imaginons que l'on double indéfiniment le nombre des côtés de ANB; la surface décrite par la ligne polygonale tend vers une limite qui n'est autre que la zone elle-même, tandis que OK tend vers sa limite qui est le rayon de la sphère; l'égalité (1), constamment vraie, quel que soit le nombre des côtés de la ligne polygonale, devient à la limite

$$\text{surf. zone} = 2\pi R \times IH = 2\pi R \times H,$$

si nous désignons par H la hauteur de la zone.

343. Corollaire. *Deux zones quelconques de la même sphère sont entre elles comme leurs hauteurs.*

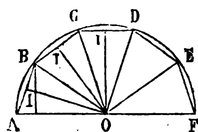
Remarque. Des cordes égales inscrites en divers endroits d'une demi-circonférence engendrent des zones inégales; la plus grande de ces zones est engendrée par la corde parallèle à l'axe; car celle-ci a la plus grande projection.

Théorème.

344. *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier* OBCDE, *tournant autour d'un diamètre*, AF, *du cercle circonscrit, est égal à la surface décrite par le contour polygonal* BCDE, base du secteur, *multipliée par le tiers du rayon du cercle inscrit* (*).

$$\text{vol. OBCDE} = \text{surf. BCDE} \times \frac{1}{3}\text{OI}.$$

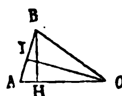
Le secteur polygonal peut se décomposer en autant de triangles isocèles BOC, COD, etc., que sa base a de côtés; ces triangles engendrent des volumes distincts les uns des autres, que nous allons évaluer. Pour cela, nous remarquerons que tous ces triangles ont un sommet commun O situé sur l'axe; que le côté opposé à ce som-



(*) Nous appelons *secteur polygonal régulier* celui qui a pour base une *ligne polygonale réglière.*

met dans chaque triangle ne peut avoir, quel que soit le nombre des triangles, que l'une de ces trois positions : être adjacent à l'axe, comme AB; non adjacent, sans être parallèle, comme BC; parallèle comme CD. Nous allons considérer ces trois cas.

1° *Le côté* AB *est adjacent à l'axe.* Le volume engendré par le triangle OAB, que nous appellerons vol. AOB, est la somme des volumes des deux cônes décrits par les triangles ABH, BHO, tournant autour de AO.



On sait que
$$\text{vol. ABH} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{BH}}^2 \times \text{AH}$$
$$\text{vol. OBH} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{BH}}^2 \times \text{HO}.$$

La somme
$$\text{vol. ABO} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{BH}}^2 \times \text{AO}. \qquad (1)$$

$\text{Vol. ABO} = \frac{1}{3}\pi\text{BH}\times\text{BH}\times\text{AO}$; or, le produit $\text{BH}\times\text{HO}$ exprime le double de la surface du triangle ABO; la même surface, 2ABO, quand on prend AB pour base, a pour mesure $\text{AB}\times\text{OI}$; donc $\text{BH}\times\text{HO}=\text{AB}\times\text{OI}$. Si l'on remplace $\text{BH}\times\text{AO}$ par $\text{AB}\times\text{OI}$ dans l'expression de vol. ABO, nous aurons

$$\text{vol. ABO} = \frac{1}{3}\pi\text{BH}\times\text{AB}\times\text{OI}.$$

Mais d'une autre part, la surface décrite par la ligne AB, surf. AB, n'étant autre que la surface convexe du cône engendré par le triangle ABH, on a

$$\text{surf. AB} = 2\pi\text{BH}\times\frac{\text{AB}}{2} = \pi\text{BH}\times\text{AB}.$$

En remplaçant $\pi\text{BH}\times\text{AB}$ par surf. AB, dans vol. ABO, on trouve enfin

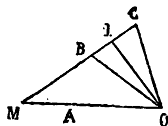
$$\text{vol. ABO} = \text{surf. AB}\times\frac{1}{3}\text{OI};$$

ce qui est la mesure annoncée.

Remarque. Dans cette démonstration, nous n'avons pas supposé le triangle AOB isocèle.

2° *Le côté* BC *opposé au sommet qui est sur l'axe n'est ni adjacent, ni parallèle à l'axe.*

Ce côté BC prolongé rencontre l'axe en M. La figure CBMO tournant autour de l'axe OM, on voit que

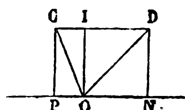


$$\text{vol. OBC} = \text{vol. OMC} - \text{vol. OMB}.$$

Chacun des triangles OMC, OMB se trouve dans le premier cas (1°). On a donc $\text{vol. OMC} = \text{surf. MC} \times \frac{1}{3}\text{OI}$; $\text{vol. OMB} = \text{surf. MB} \times \frac{1}{3}\text{OI}$; donc $\text{vol. OMC} - \text{vol. OMB}$, ou $\text{vol. OBC} = \frac{1}{3}\text{OI}.(\text{surf. MC} - \text{surf. MB}) = \frac{1}{3}\text{OI} \times \text{surf. BC}$; ce qui est la mesure annoncée.

3° *Le côté opposé au sommet qui est sur l'axe est parallèle à cet axe.*

Le volume décrit par la révolution du triangle OCD est égal au cylindre engendré par le rectangle CDNP, diminué des deux cônes engendrés par les deux triangles COP, DNO.



$$\text{vol.COD} = \text{vol.CDNP} - \text{vol.COP} - \text{vol.DNO}. \quad (1)$$

$$\text{vol. CDNP} = \pi.\overline{\text{CP}}^2 \times \text{PN} = \pi\overline{\text{OI}}^2 \times \text{PN}.$$

$$\text{vol. COP} = \frac{1}{3}\pi.\overline{\text{CP}}^2 \times \text{PO} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2 \times \text{PO}.$$

$$\text{vol. DNO} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{DN}}^2 \times \text{ON} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2 \times \text{ON}.$$

D'où on déduit, en vertu de l'égalité (1),

$$\text{vol. COD} = \pi.\overline{\text{OI}}^2\left(\text{PN} - \frac{1}{3}\text{PO} - \frac{1}{3}\text{ON}\right) = \pi.\overline{\text{OI}}^2\left(\text{PN} - \frac{1}{3}\text{PN}\right) = \pi\overline{\text{OI}}^2 \times \frac{2}{3}\text{PN};$$

ou

$$\text{vol. COD} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2 \times \text{PN}. \quad (1)$$

Mais $\quad \text{surf. CD} = 2\pi\text{CP} \times \text{PN} = 2\pi\text{OI} \times \text{PN}$;

d'où $\quad \text{surf. CD} \times \frac{1}{3}\text{OI} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2 \times \text{PN}$;

donc enfin $\quad \text{vol. COD} = \text{surf. CD} \times \frac{1}{3}\text{OI}$;

ce qui est la mesure annoncée.

Surf. AB, surf. BC, surf. CD, etc., étant distinctes comme vol. OAB, vol. OBC, etc., en additionnant ces volumes, pris en nombre quelconque, on trouve, par ex. :

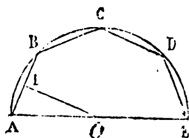
$$\text{vol. OBCDE} = (\text{surf. BC} + \text{surf. CD} + \text{surf. DE}) \times \frac{1}{3}\text{OI} =$$

$$\text{surf. BCDE} \times \frac{1}{3}\text{OI}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème.

345. *Le volume d'une sphère est égal à sa surface multipliée par le tiers de son rayon.*

Inscrivons dans le demi-cercle ACE, qui engendre le volume de la sphère, un demi-polygone régulier ABCDE. Ce demi-polygone, tournant avec le demi-cercle, engendre un volume que nous venons d'apprendre à évaluer,



$$\text{vol. ABCDE} = \text{surf. ABCDE} \times \frac{1}{3}\text{OI}. \quad (1)$$

Imaginons que l'on double indéfiniment le nombre des côtés du demi-polygone; le volume engendré par ce demi-polygone tend vers une limite qui est le volume de la sphère (n° 337); tandis que surf. ABCDE tend vers sa limite qui est la surface de la sphère, et OI vers une limite qui est le rayon R de la sphère. L'égalité (1), constamment vraie, quel que soit le nombre des côtés du demi-polygone régulier, devient à la limite

$$\text{vol. sphère} = \text{surf. sphère} \times \frac{1}{3}\text{R}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE. Surf. sphère $= 4\pi R^2$; donc *vol. sphère* $= \frac{4}{3}\pi R^3$.

Soit D le diamètre de la sphère; $R = \frac{D}{2}$; $R^3 = \frac{D^3}{8}$; d'où résulte

vol. sphère $= \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8} = \frac{4}{24}\pi D^3$ ou,

$$\text{vol. sphère} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

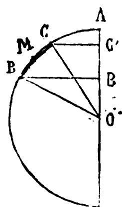
346. SECTEUR SPHÉRIQUE. On donne le nom de *secteur sphérique* au volume engendré par un secteur circulaire tournant autour d'un diamètre adjacent ou extérieur; ex. : secteur OAC ou secteur OCB (*fig.* ci-après).

Théorème.

347. *Le volume d'un secteur sphérique est égal à la zone qui lui sert de base, multiplié par le tiers du rayon de la sphère.*

$$\text{sect. sphér. OBC} = \text{zone BC} \times \frac{1}{3}\text{OB}.$$

En effet, inscrivons dans l'arc BC une ligne polygonale régulière BMC (*); le secteur polygonal OBMC engendre un volume dont nous connaissons la mesure (n° 344).



$$\text{vol. OBMC} = \text{surf. BMC} \times \frac{1}{3}\text{OI}. \quad (1)$$

Imaginons que l'on double indéfiniment le nombre des côtés; le volume polygonal OBMC tend vers une limite qui est le secteur sphérique (n° 344); tandis que surf. BMC tend vers sa limite qui est zone BC, et OI vers une limite qui est le rayon OB $=$ R de la sphère. L'égalité (1), constamment vraie, quel que soit le nombre des côtés de la ligne polygonale régulière inscrite, devient à la limite

$$\text{sect. sphér. OBC} = \text{zone BC} \times \frac{1}{3}\text{OB}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

(*) Marquez le point M au milieu de l'arc BC et tirez BM, MC.

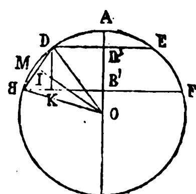
REMARQUE. Soit R le rayon de la sphère, H la hauteur de la zone, qui est la projection de l'arc BC sur l'axe; zone BC $= 2\pi R \times H$; sect. sphér. OBC $= 2\pi R . H \times \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} \pi R^2 . H$.

Théorème.

848. *Le volume engendré par le segment circulaire* BMD *est égal au sixième du cercle qui a pour rayon la corde du segment, multiplié par la projection de cette même corde sur l'axe.*

$$\text{vol. seg. BMD} = \frac{1}{6} \pi \overline{BD}^2 \times B'D'.$$

En effet, le volume engendré par le segment circulaire BMD est la différence des volumes engendrés par le secteur circulaire OBMD et le triangle isocèle OBD. Or on sait que



$$\text{sect. sph. OBMD} = \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2 \times B'D'$$

$$\text{vol. OBD} = \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2 \times B'D'$$

$$\text{donc vol. seg. BMD} = \frac{2}{3} \pi B'D' \times (\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2) = \frac{2}{3} \pi B'D' \times \overline{BI}^2.$$

$$BI = \frac{BD}{2} \text{ et } \overline{BI}^2 = \frac{\overline{BD}^2}{4}\ ;\ \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Donc $\quad \text{vol. seg. BOD} = \frac{1}{6} \pi \overline{BD}^2 \times B'D'.$ C. Q. F. D.

La sphère dont BD serait le rayon aurait pour volume $\frac{1}{6} \pi \overline{BD}^3$; vol. seg. BMD est à cette sphère comme B'D' est à BD.

Théorème.

849. *Le volume d'un segment de sphère, à bases parallèles, est égal à la demi-somme de ces bases multipliée par leur distance, plus le volume de la sphère qui aurait cette distance pour diamètre.*

Le segment de sphère dont il est question est la partie du volume de la sphère comprise entre deux plans parallèles (cercle DD', cercle BB') (*fig.* précé-

dente). Ce volume est la somme du volume engendré par le segment circulaire BMD, et du tronc de cône engendré par la révolution du trapèze BDD'B'.

Or $\text{vol. seg. BMD} = \frac{1}{6}\pi\overline{BD}^2 \times B'D'$.

$$\text{vol. BDD'B'} = \frac{1}{3}\pi B'D'(\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 + BB' \times DD') \quad (\text{n}^\text{c}\ 318);$$

additionnant après avoir remplacé $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{6} \times 2$, dans la seconde égalité, ce qui amène le facteur commun $\frac{1}{6}\pi B'D'$, nous trouvons

$$\text{vol. seg. BMDD'B'} = \frac{1}{6}\pi B'D'(\overline{BD}^2 + 2\overline{BB'}^2 + 2\overline{DD'}^2 + 2BB' \times DD'). \quad (1)$$

Mais dans le triangle rectangle BDK, nous avons $\overline{BD}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{BK}^2 = \overline{B'D'}^2 + \overline{BK}^2$; or $BK = BB' - DD'$; $\overline{BK}^2 = \overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2BB' \times DD'$;

donc $$\overline{BD}^2 = \overline{B'D'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2BB' \times DD'.$$

Remplaçant $\overline{BD}^2$ par cette valeur dans l'égalité (1), nous aurons en réduisant $$\text{vol. seg. BMDD'B'} = \frac{1}{6}\pi B'D'(\overline{B'D'}^2 + 3\overline{BB'}^2 + 3\overline{DD'}^2);$$

ou $$\text{vol. seg. BMDD'B'} = \frac{1}{6}\pi\overline{B'D'}^3 + \frac{1}{2}\pi B'D'(\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2).$$ C. Q. F. D.

L'un des cercles qui limitent le segment peut être tangent à la sphère; alors le segment n'a qu'une base; on n'a qu'à supprimer une base dans ce qui précède, à faire $DD' = 0$, par exemple, pour avoir l'expression du volume dans le cas particulier dont il est question.

APPLICATIONS.

Problème I.

Un rouleau cylindrique de bois de chêne a 0m,3 de diamètre et 2m,5 de longueur; le poids spécifique du chêne est 1,17; on demande le volume et le poids du rouleau.

Prenons le centimètre pour unité de longueur; dans ce cas le rayon de notre cylindre est 15, sa hauteur 250; son volume est donc égal à $\pi \times 15^2 \times 250$. Quant au poids on dira : 1 centimètre cube d'eau pesant 1 gramme, 1 centimètre cube de chêne pèse

$1^{gr.},17$; donc $(\pi \times 15^2 \times 250)$ centimètres cubes de chêne pèseront $\pi \times 15^2 \times 250 \times 1,17$ grammes.

Problème II.

La densité de l'air étant $\frac{1}{770}$ *du poids de l'eau, on demande le poids de l'air contenu dans un cylindre dont la circonférence de la base est* $0^m,3$ *et la hauteur* 0,8.

Prenons le centimètre par unité linéaire; alors circ. $=30$; hauteur $=80$. Appelons r le rayon de la base du cylindre $2\pi r = 30$; $r = \frac{15}{\pi}$; $\pi r^2 = \frac{15^2}{\pi}$; le volume du cylindre en centimètres cubes $= \frac{15^2 \times 80}{\pi}$. Un centimètre cube d'air pèse $\frac{1^{gr.}}{770}$; le poids cherché est donc $\frac{15^2 \times 80}{\pi \times 770}$ grammes.

Problème III.

En supposant la terre sphérique, sachant que le mètre est la 10000000ième *partie du quart du méridien terrestre, trouver en kilomètres le rayon de la terre, et sa surface en hectares.*

Appelons R le rayon de la terre; il résulte de l'énoncé que la longueur d'un méridien ou $2\pi R = 40000000$ mètres; donc $R = \frac{40000000^m}{2\pi} = \frac{20000^{\text{kilom.}}}{\pi}$; on calculera cette longueur à moins d'une unité par la division abrégée. Pour obtenir en hectares la surface qui est égale à $4\pi R^2 = 2\pi R \times 2R = 40000 \times \frac{40000}{\pi}$ kilomètres carrés, il suffit d'observer que 1 hectare $=$ 10000 mètres carrés, et 1 kilom. carré $=1000000$ mètres carrés $=$ 100 hectares; le nombre des hectares est donc $\frac{(40000)^2 \times 100}{\pi}$.

Problème IV.

Un triangle équilatéral dont le côté est $2^m,75$ *tourne autour d'un de ses côtés; trouver le volume engendré.*

Si on abaisse la hauteur correspondant à l'axe, on voit facilement que le volume engendré est égal à $\frac{1}{3}\pi h^2 \times a$; ($h$ étant la hauteur du triangle, a son côté); mais $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$; le volume cherché est donc $\frac{\pi a^3}{4} = \frac{\pi \times (2,75)^3}{4}$.

Problème V.

On a un vase cylindrique dont le diamètre intérieur est $0^m,1$. *Le vase reposant sur un plan horizontal par son fond circulaire, on y verse* 12 *kilogrammes de mercure. A quelle hauteur s'élèvera le liquide dont la densité est* 13,596.

Désignons par x la hauteur cherchée; prenons pour unité linéaire le centimètre et pour unité de poids le gramme; nous avons alors pour données, le diamètre intérieur $= 10$, et par suite le rayon $= 5$; le poids du mercure $= 12000$ grammes, et le poids d'un centimètre cube de mercure $= 13^{gr.},596$. Le volume du cylindre est $\pi \times 5^2 \times x$ centimètres cubes; son poids $\pi \times 5^2 \times x \times 13,596$ gr.; ce poids étant en réalité 12000 grammes, nous avons l'équation

$$\pi \times 5^2 \times x \times 13,596 = 12000.$$

de laquelle on déduit la valeur de x en centimètres.

Problème VI.

On a un aérostat sphérique de 4 mètres de diamètre; on l'emplit d'hydrogène impur dont le mètre cube pèse 100 grammes. Le taffetas vernis, dont est formée l'enveloppe, pèse 250 grammes le mètre carré. On demande combien il faut d'hydrogène pour remplir cet aérostat,

et à quel poids il peut faire équilibre, sachant qu'un mètre cube d'air pèse 1300 *grammes.*

La surface d'une sphère de rayon $R = 4\pi R^2$; dans notre question $R = 2$ mètres; la surface de l'aérostat est donc $4\pi \times 2^2 = 16\pi$ mètres carrés; le poids de l'enveloppe est donc égal à $250^{gr.} \times 16\pi$. Le volume intérieur est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi \times 2^3}{3} = \frac{32\pi}{3}$ mètres cubes; le poids de l'hydrogène qui remplit ce ballon est donc $100^{gr.} \times \frac{32\pi}{3}$; le volume d'air qu'il déplace pèse donc $1300^{gr.} \times \frac{32\pi}{3}$. Ce dernier poids doit faire équilibre au poids de l'enveloppe, au poids de l'hydrogène intérieur, et à un certain poids additionnel x. On a donc $1300 \times \frac{32\pi}{3} = 250 \times 16\pi + 100 \times \frac{32\pi}{3} + x$. D'où on déduira la valeur de x.

Problème VII.

Une sphère de cuivre de $0^m,18$ *de rayon, creuse, contient une sphère de platine de* 0,05 *de rayon, de telle manière qu'il n'existe aucun vide entre les deux sphères; la densité du platine est* 21,53, *celle du cuivre* 8,85. *Calculer le poids de la masse ainsi formée.*

Nous prendrons pour unité linéaire le centimètre, et pour unité de poids le gramme (*). Le plus grand rayon $R = 18$; le plus petit $r = 5$; le poids d'un centimètre cube de platine est $21^{gr.},53$, et de cuivre $8^{gr.},85$.

Si la première sphère était pleine, son volume serait égal à $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 18^3$, et son poids $\frac{4}{3}\pi \times 18^3 \times 8,85$; on en a retiré une sphère de cuivre de 5 centimètres de rayon, pesant par conséquent $\frac{4}{3}\pi . 5^3 \times 8,85$, pour la remplacer par une sphère de platine de même rayon, pesant par conséquent $\frac{4}{3}\pi . 5^3 \times (21,53)^3$.

(*) Le choix de ces unités simplifie, selon nous, la résolution des questions de ce genre.

Le poids de la sphère telle qu'elle est composée est donc $\frac{4}{3}\pi\times18^3\times$ $8{,}85-\frac{4}{3}\pi\times5^3\times8{,}85+\frac{4}{3}\pi\times5^3\times(21{,}53)=\frac{4}{3}\pi[18^3\times 8{,}85$ $+5^3\times(21{,}53)-5^3\times8{,}85.]$

Problème VIII.

On donne une sphère dont le rayon est de 13 mètres, et sur laquelle on considère une zone à deux bases, dont l'une est à 1^m de distance du centre de la sphère ; la surface de cette zone est 100 mètres carrés ; on demande la surface du cercle qui forme la seconde base de cette zone.

Si on désigne par x la hauteur de cette zone, on a $2\pi\times13\times x=100$ (nº 342); d'où $x=\frac{100}{2\pi\times13}$. Cette valeur étant plus grande que 1, la seconde base est la plus éloignée du centre; sa distance est $1+x$. Soit y le rayon de cette seconde base; $y^2+(1+x)^2=13^2=169$; donc $y^2=169-(1+x)^2$.

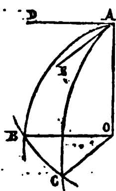
La surface demandée de la seconde base de la zone est égale à $\pi y^2=\pi[169-(1+x)^2]$. On remplacera x par sa valeur ci-dessus indiquée, et on effectuera les calculs.

APPENDICE.

DES TRIANGLES ET DES POLYGONES SPHÉRIQUES.

350. Nous ne considérerons, en général, sur la sphère, que des figures formées par des arcs de grands cercles.

Des angles sur la sphère. L'angle de deux arcs de grands cercles AB, AC est l'angle formé par les tangentes AD, AE menées à ces arcs à leur point de rencontre. Cet angle est égal à l'angle dièdre des plans des deux grands cercles; en effet, les tangentes AE, AD étant perpendiculaires au rayon AO, l'angle DAE mesure l'angle dièdre.



Le point A est le sommet de l'angle sphérique; les arcs AB, AC en sont les côtés.

et à quel poids il peut faire équilibre, sachant qu'un mètre cube d'air pèse 1300 *grammes.*

La surface d'une sphère de rayon R $= 4\pi R^2$; dans notre question $R = 2$ mètres; la surface de l'aérostat est donc $4\pi \times 2^2 = 16\pi$ mètres carrés; le poids de l'enveloppe est donc égal à $250^{gr.} \times 16\pi$. Le volume intérieur est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi \times 2^3}{3} = \frac{32\pi}{3}$ mètres cubes; le poids de l'hydrogène qui remplit ce ballon est donc $100^{gr.} \times \frac{32\pi}{3}$; le volume d'air qu'il déplace pèse donc $1300^{gr.} \times \frac{32\pi}{3}$. Ce dernier poids doit faire équilibre au poids de l'enveloppe, au poids de l'hydrogène intérieur, et à un certain poids additionnel x. On a donc $1300 \times \frac{32\pi}{3} = 250 \times 16\pi + 100 \times \frac{32\pi}{3} + x$. D'où on déduira la valeur de x.

Problème VII.

Une sphère de cuivre de $0^m,18$ *de rayon, creuse, contient une sphère de platine de* 0,05 *de rayon, de telle manière qu'il n'existe aucun vide entre les deux sphères; la densité du platine est* 21,53, *celle du cuivre* 8,85. *Calculer le poids de la masse ainsi formée.*

Nous prendrons pour unité linéaire le centimètre, et pour unité de poids le gramme (*). Le plus grand rayon $R = 18$; le plus petit $r = 5$; le poids d'un centimètre cube de platine est $21^{gr.},53$, et de cuivre $8^{gr.},85$.

Si la première sphère était pleine, son volume serait égal à $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 18^3$, et son poids $\frac{4}{3}\pi \times 18^3 \times 8,85$; on en a retiré une sphère de cuivre de 5 centimètres de rayon, pesant par conséquent $\frac{4}{3}\pi . 5^3 \times 8,85$, pour la remplacer par une sphère de platine de même rayon, pesant par conséquent $\frac{4}{3}\pi . 5^3 \times (21,53)^1$.

(*) Le choix de ces unités simplifie, selon nous, la résolution des questions de ce genre.

Le poids de la sphère telle qu'elle est composée est donc $\frac{4}{3}\pi \times 18^3 \times 8{,}85 - \frac{4}{3}\pi \times 5^3 \times 8{,}85 + \frac{4}{3}\pi \times 5^3 \times (21{,}53) = \frac{4}{3}\pi [18^3 \times 8{,}85 + 5^3 \times (21{,}53) - 5^3 \times 8{,}85.]$

Problème VIII.

On donne une sphère dont le rayon est de 13 mètres, et sur laquelle on considère une zone à deux bases, dont l'une est à 1^m de distance du centre de la sphère ; la surface de cette zone est 100 mètres carrés ; on demande la surface du cercle qui forme la seconde base de cette zone.

Si on désigne par x la hauteur de cette zone, on a $2\pi \times 13 \times x = 100$ (nº 342); d'où $x = \frac{100}{2\pi \times 13}$. Cette valeur étant plus grande que 1, la seconde base est la plus éloignée du centre ; sa distance est $1+x$. Soit y le rayon de cette seconde base ; $y^2 + (1+x)^2 = 13^2 = 169$; donc $y^2 = 169 - (1+x)^2$.

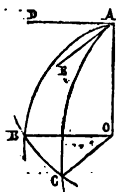
La surface demandée de la seconde base de la zone est égale à $\pi y^2 = \pi[169 - (1+x)^2]$. On remplacera x par sa valeur ci-dessus indiquée, et on effectuera les calculs.

APPENDICE.

DES TRIANGLES ET DES POLYGONES SPHÉRIQUES.

350. Nous ne considérerons, en général, sur la sphère, que des figures formées par des arcs de grands cercles.

Des angles sur la sphère. L'angle de deux arcs de grands cercles AB, AC est l'angle formé par les tangentes AD, AE menées à ces arcs à leur point de rencontre. Cet angle est égal à l'angle dièdre des plans des deux grands cercles ; en effet, les tangentes AE, AD étant perpendiculaires au rayon AO, l'angle DAE mesure l'angle dièdre.



Le point A est le sommet de l'angle sphérique ; les arcs AB, AC en sont les côtés.

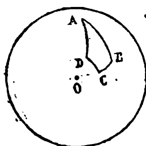
Théorème.

351. *L'angle* BAC *de deux arcs de grands cercles a pour mesure l'arc de grand cercle*, BC, *compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme pôle* (n° 333).

En effet, l'angle AOB ayant pour mesure l'arc AB, qui est un quadrant (n° 331), est un angle droit; AOC, de même; l'angle BOC, formé par deux perpendiculaires au rayon AO, est égal à l'angle DAE (n° 350), ou à l'angle sphérique BAC; l'arc BC qui mesure AOC, mesure donc BAC. C. Q. F. D.

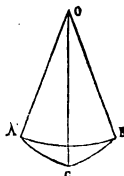
352. La comparaison des angles sur la sphère revient donc à la comparaison d'arcs de grands cercles; en faisant usage des propriétés des pôles pour décrire des arcs de grands cercles, on peut facilement faire des angles de grandeurs données. Ces angles sphériques jouissent de propriétés analogues à celles des angles rectilignes; les angles opposés par le sommet sont égaux; les angles adjacents sont supplémentaires, etc. Pour démontrer ces propositions, il suffit d'observer que les angles opposés par le sommet sont formés par les mêmes grands cercles; que les angles dièdres adjacents sont supplémentaires, etc.

353. On appelle *polygone sphérique* une partie de la surface de la sphère terminée par des arcs de grands cercles.



Ces arcs, que nous supposerons moindres que des demi-circonférences, sont les *côtés* du polygone; leurs angles sont les *angles* du polygone; leurs points de rencontre en sont les *sommets*. Nous supposerons aussi les polygones convexes, c'est-à-dire tels que l'un des arcs prolongé laisse toute la figure du même côté.

354. Le plus simple de tous les polygones sphériques est le *triangle*. Un triangle sphérique est *rectangle*, *isocèle*, *équilatéral* dans les mêmes cas qu'un triangle rectiligne.



352. A chaque triangle sphérique, ABC, correspond un *angle solide trièdre* OABC, formé au centre de la sphère par les plans des arcs de grands cercles AB, AC, BC qui forment le triangle.

Les angles plans AOB, AOC, BOC de ce trièdre ont pour mesure les côtés du triangle; les angles dièdres du trièdre sont précisément égaux aux angles du triangle. Il résulte de là que si deux triangles sphériques sont égaux dans toutes leurs parties, il en est de même des trièdres, et réciproquement.

355. A chaque polygone sphérique correspond de même un angle polyèdre auquel s'applique tout ce que nous venons de dire.

Théorème.

356. *Deux triangles sphériques qui ont les côtés égaux chacun à chacun sont égaux dans toutes leurs parties, c'est-à-dire, ont les angles égaux chacun à chacun.*

En effet, les angles trièdres qui correspondent à ces triangles, ayant leurs angles plans respectivement égaux, ont leurs dièdres égaux chacun à chacun (n° 267); donc les angles des triangles sphériques, respectivement égaux à ces dièdres, sont égaux chacun à chacun.

357. De même que deux angles trièdres, égaux dans toutes leurs parties, ne peuvent pas toujours coïncider (n° 267), de même deux triangles sphériques, égaux dans toutes leurs parties, ne coïncident pas nécessairement. Il faut, pour qu'ils puissent coïncider, que leurs parties égales soient semblablement disposées.

358. Étant donnés un triangle sphérique, ABC, et le trièdre correspondant, si l'on prolonge les arêtes AO, BO, CO, de celui-ci, jusqu'à la surface de la sphère en A', B', C', on détermine un nouveau triangle A'B'C', dont tous les éléments sont évidemment égaux à ceux du triangle ABC (angles et côtés); néanmoins, il est impossible de faire coïncider les deux triangles. En effet, si les deux triangles coïncidaient, les plans des côtés coïncidant en même temps, les deux trièdres coïncideraient; ce que nous avons démontré impossible, n° 268.

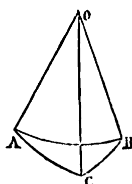
359. On appelle *triangles sphériques symétriques* deux triangles qui, ayant leurs éléments égaux chacun à chacun, ne peuvent coïncider.

360. On peut encore obtenir, comme il suit, un triangle sphérique symétrique d'un triangle donné ABC. Du point A comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de AC, je décris un arc CmC'; du point B comme pôle, je décris l'arc CnC'; je joins le point A et le point B au point C' par des arcs de grands cercles; le triangle ABC' ainsi formé, et le triangle donné ABC, ont évidemment les trois côtés égaux; ils ont donc aussi les angles égaux. Cependant il est, en général, impossible de les faire coïncider; ils ne peuvent coïncider que si $AC = BC$, et par suite $AC' = BC'$. Les trièdres correspondants sont situés de part et d'autre de la face commune OAB (O centre de la sphère). Si on essaye de ramener l'un d'eux du même côté de ce plan que l'autre, on trouve que les faces égales sont diversement disposées. Si on essaie de faire coïncider directement les deux triangles sphériques, en faisant tourner l'un d'eux autour du côté commun AB, il arrive que les concavités se regardent, ou que les concavités se trouvent adossées l'une à l'autre; la coïncidence est impossible.

361. Il résulte de ce qui précède que les propositions qui concernent les éléments des angles solides, trièdres ou polyèdres, s'appliquent aux éléments des triangles ou polygones sphériques.

Théorème.

362. *Un côté quelconque d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres.*



Je mène les rayons OA, OB, OC; dans l'angle trièdre OABC, on a l'angle AOB < AOC + BOC; en remplaçant les angles par les arcs qui les mesurent, on trouve AB < AC + BC. C. Q. F. D.

Théorème.

363. *La somme des côtés d'un triangle ou d'un polygone sphérique est moindre qu'une circonférence de grand cercle.*

En effet, si l'on considère l'angle solide correspondant au triangle, ou au polygone, de ce que la somme des angles plans de cet angle solide est moindre quê quatre angles droits (n° 266), on conclut que la somme des côtés du polygone, qui mesurent ces angles, est moindre que quatre quadrants ou une circonférence.

364. On démontre aisément par la superposition, comme on l'a fait pour les triangles rectilignes, les théorèmes suivants :

Deux triangles sphériques sont égaux dans toutes leurs parties quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun.

L'un de ces triangles peut coïncider avec l'autre ou avec son symétrique.

Deux triangles sphériques sont de même égaux dans toutes leurs parties quand ils ont un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun.

On démontre encore, comme dans le premier livre, les théorèmes suivants :

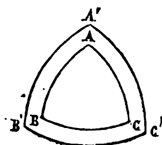
Dans un triangle sphérique isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

La réciproque est vraie.

Dans un triangle sphérique, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement.

TRIANGLES POLAIRES OU SUPPLÉMENTAIRES.

365. Définition. Un triangle sphérique étant donné, si des points A, B, C comme pôles, on décrit les arcs de grands cercles B'C', A'C', A'B', ces arcs forment un triangle A'B'C' qu'on appelle le triangle *polaire* de ABC.



Le sommet A', *homologue* du point A, est déterminé par la rencontre des arcs décrits de B et C comme pôles; ces arcs A'C', B'A' se coupent en deux points; mais on ne prend que celui des deux qui est avec A du même côté de BC; de même pour les autres sommets.

Théorème.

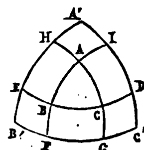
366. *Si le triangle* A'B'C' *est le polaire du triangle* ABC, *réciproquement* ABC *est le polaire de* A'B'C' (*fig.* précédente).

En effet le point B étant le pôle de A'C', l'arc de grand cercle qui joindrait A'B' est un quadrant; de même C étant le pôle de A'B', l'arc CA' serait un quadrant; le point A', étant distant d'un quadrant de deux points B et C de l'arc BC, est le pôle de l'arc BC (n° 332). On démontrerait de même que B' est le pôle de AC, et C' le pôle de AB.

Théorème.

367. *Étant donnés deux triangles polaires* ABC, A'B'C', *chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence, moins le côté opposé de l'autre triangle.*

Prolongeons les côtés de ABC jusqu'à rencontrer ceux de A'B'C'. Le point A étant le pôle de B'C', l'angle, A, a pour mesure FG; B' étant le pôle de AC, B'G $=1$ quadrant; C' étant le pôle de AB, C'F $=1$ quadrant; donc B'G + C'F $=\frac{1}{2}$ circonférence. Si on décompose C'F en GC' + FG, cette égalité devient B'G + GC' + FG = B'C' + FG $=\frac{1}{2}$ circonférence; d'où FG $=\frac{1}{2}$ circonférence — B'C'; mais FG mesure l'angle A; donc l'angle A a bien pour mesure une demi-circonférence, moins le côté opposé du triangle polaire. On démontrerait de même pour les angles B et C.



Considérons l'angle A' qui a pour mesure l'arc ED décrit de son sommet comme pôle; le point C étant le pôle de l'arc A'B', CE $=1$ quadrant; de même BD $=1$ quadrant; donc CE + BD $=\frac{1}{2}$ circonférence; ou en décomposant BD, CE + CD + CB = ED + BC $=\frac{1}{2}$ circonférence; d'où ED $=\frac{1}{2}$ circ. — BC; mais ED est la mesure de l'angle A'; donc celui-ci a la mesure indiquée.

Si on considère les deux angles trièdres correspondant respectivement aux triangles ABC, A'B'C', on trouve que les angles plans de l'un sont les suppléments des dièdres de l'autre, et réciproquement.

Ces deux trièdres sont donc *supplémentaires* (V. l'Appendice du livre V).

Théorème.

368. *Deux triangles sphériques qui ont les angles égaux, chacun à chacun, sont égaux dans toutes leurs parties.*

En effet les triangles polaires des triangles proposés ont évidemment les côtés égaux chacun à chacun, et par suite les angles égaux (n° 356); de l'égalité de ces angles résulte celle de leurs suppléments, qui sont les côtés des triangles proposés.

Théorème.

369. *La somme des angles d'un triangle sphérique est comprise entre deux droits et six droits.*

En effet, soient A, B, C les angles du triangle; a', b', c', les côtés opposés du triangle polaire. On sait que $A + a' = 180°$; $B + b' = 180°$; $C + c' = 180°$; donc $A + B + C + a' + b' + c' = 180° \times 3$; $A + B + C = 180° \times 3 - (a' + b' + c')$. Donc 1° la somme des mesures de A, B, C, est moindre que 3 demi-circonférences, mesure de six angles droits; d'ailleurs, $a' + b' + c'$ est moindre qu'une circonf.; d'où il résulte que 3 demi-circonférences $-(a' + b' + c')$ vaut plus qu'une demi-circonférence, mesure de deux droits; donc $A + B + C > 2$ droits; donc enfin $2^{dr.} < A + B + C < 6$ droits. C. Q. F. D.

370. Corollaire. *La somme* B + C, *de deux angles d'un triangle sphérique est comprise entre deux droits moins le troisième*, A, *et deux droits plus ce troisième.*

$$2^{dr.} - A < B + C < 2^{dr.} + A, \text{ ou } 180° - A < B + C < 180° + A.$$

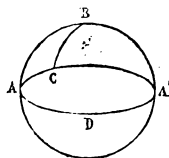
En effet de $A + B + C > 2^{dr.}$ on déduit $B + C > 2^{dr.} - A$. D'un autre côté a', b', c' étant les côtés du triangle polaire, l'inégalité $a' < b' + c'$, revient à

$$2^{dr.} - A < 2^{dr.} - B + 2^{dr.} - C$$

d'où

$$B + C > 2^{dr.} + A \text{ ou } B + C > 180° + A.$$

371. Remarque. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, chaque côté de triangle ou polygone sphérique moindre qu'une demi-circonférence; nous observerons cependant qu'il existe des triangles dont certains côtés sont plus grands que des demi-circonférences. En effet, un triangle ABC ayant ses trois côtés moindres que des demi-circonférences, si on prolonge l'un de ces côtés, AC, de manière à achever la circonférence ACA'DA, on peut remarquer que le triangle BAC étant retranché de l'hémisphère supérieur, il reste un triangle formé par les côtés BC, BA et l'arc CA'DA > qu'une demi-circonférence. Mais il est facile de voir qu'à part les côtés AC, BA communs aux deux triangles; toutes les parties du second se déduisent de celles du premier (les angles sont supplémentaires, et CA'DA = 1 circ. — CA). Ayant déterminé les éléments du triangle ordinaire BAC, on connaît donc les éléments de l'autre. Toute question relative à ce dernier se ramène aisément à une question relative au premier.



DISTANCES DE DEUX POINTS SUR LA SPHÈRE.

Théorème.

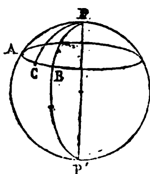
372. *Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points.*

Nous nous appuierons sur deux propositions auxiliaires.

1° *La plus courte distance du pôle,* P, *d'une circonférence, tracée sur la sphère, à un point de cette circonférence est la même, quel que soit le point considéré.* Par ex. : la distance du point P au point A est la même que la distance de P à B.

Cela résulte de la symétrie parfaite d'une surface sphérique. On regarde cette proposition comme évidente.

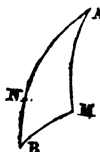
On peut, si on veut, l'expliquer comme il suit : Imaginons une seconde surface sphérique de même rayon que la proposée, recouvrant celle-ci, les mêmes points et les mêmes lignes étant marqués sur les deux surfaces. Faisons tourner la surface enveloppante autour de PP′ comme axe; le point P restant fixe, le point B, parcourant la circonférence BCA, arrive bientôt en A. Mais alors la plus courte distance entre P et A, quelle qu'elle soit, est évidemment égale à celle de P à B; or celle-ci n'a pas changé parce que la surface sphérique a tourné; donc quelle que soit la position de B sur la circonférence, la plus courte distance entre P et B est la même qu'entre P et A.



2° *Deux arcs de grands cercles,* PA, PD, *étant issus du même point, si* PD > PA, *la plus courte distance sur la sphère entre* P *et* D *est plus grande que la distance entre* P *et* A (*marquez un point* D *sur* BP′).

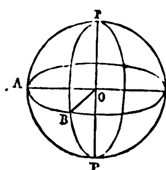
Du point P comme pôle avec la corde PA comme rayon décrivons une circonférence; cette ligne rencontre l'arc PD au point B situé entre P et D (PB = PA doit être moindre que PD). Le plus court chemin de P en D, quel qu'il soit, rencontre quelque part la circonférence BCA; supposons que ce soit en C. Ce plus court chemin se compose du plus court chemin de P en C, qui est égal au plus court chemin de P en A (1°), plus le chemin de C en D; il est donc plus long que le chemin de P en A; C. Q. F. D.

Soient maintenant A et B deux points quelconques de la surface de la sphère. Admettons que le plus court chemin entre A et B ne se fasse pas en suivant exactement l'arc AB; et soit M un point de ce plus court chemin situé hors de l'arc AB. Je joins le point M aux points A et B par des arcs de grands cercles, AM, MB. Le plus court chemin de A en B se compose, d'après l'hypothèse, du plus court chemin, c, de A en M, plus le plus court chemin, c', de M en B; ce chemin égale $c + c'$. Il résulte de là que l'arc AM est plus petit que l'arc AB; car si on avait AM = AB, ou AM > AB, on aurait, d'après 1° ou 2°, $c = c + c'$ ou $c > c + c'$; ce qui est absurde. AM étant moindre que



AB, je puis prendre sur AB un arc AN = AM. Cela posé, j'observe que dans le triangle AMB, on a AB < AM + MB, ou AN + NB < AM + MB; d'où NB < MB. L'arc NB étant moindre que MB, il résulte de 2° que le plus court chemin de N en B, que nous appellerons c'', est plus court que le plus court chemin, c', de N en B. Nous conclurons de là que le plus court chemin de A en B, en passant par N, ou $c + c''$, (AN = AM), est moindre que $c + c'$, qui est le plus court chemin de A en B, en passant par M. L'hypothèse que le plus court chemin de A en B passe par un point M, situé hors de l'arc AB, est donc fausse, puisque nous trouvons un autre chemin plus court que celui-là; donc le plus court chemin ne quitte pas l'arc AB. C. Q. F. D.

373. DÉFINITIONS. On appelle *fuseau* la portion, PAP'B, de la surface d'une sphère comprise entre deux demi-grands cercles qui se terminent à un diamètre commun.



Un onglet sphérique est la partie du volume de la sphère comprise entre ces mêmes demi-grands cercles, et à laquelle le fuseau sert de base.

Une *pyramide sphérique* est une partie du volume de la sphère comprise entre les plans d'un angle solide dont le sommet est le centre O de la sphère, et le polygone sphérique intercepté par les faces de cet angle. Ce polygone est la *base* de la pyramide.

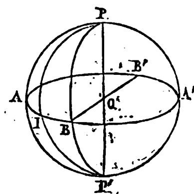
Pour que deux pyramides sphériques coïncident, il faut et il suffit que leurs bases coïncident. (Deux arcs de grands cercles ne peuvent coïncider sans que leurs centres coïncident.)

DE L'AIRE D'UN FUSEAU, D'UN POLYGONE OU D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE.

Théorème.

374. *Le fuseau* PAP'B *est à la sphère entière comme l'angle* APB *de ce fuseau est à quatre droits, ou bien, comme l'arc* AB *qui mesure cet angle est à la circonférence entière.*

En effet, supposons qu'une commune mesure soit contenue 5 fois dans l'arc AB, et 34 fois dans la circonférence ABA'B';



on a $\frac{\text{AB}}{\text{circ. ABA'B'}} = \frac{5}{34}$. Par chaque point de division de l'arc AB et de la circonférence, et les points P, P', imaginons menée une demi-circonférence de grand cercle, telle que PIP'; ces demi-circonférences partageront le fuseau PAP'B en 5 fuseaux tels que PAP'I, superposables et par suite égaux, et la sphère tout entière en 34 fuseaux égaux à ceux-là. Il résulte de là que

$$\frac{\text{fuseau PAP'B}}{\text{sphère}} = \frac{5}{34}. \text{ Donc } \frac{\text{fuseau PAP'B}}{\text{sphère}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{circ. ABA'B}} = \frac{\text{APB}}{\text{4 droits}}. \text{ C.Q.F.D.}$$

375. Mesure du fuseau. Supposons qu'on prenne pour unité le fuseau rectangle, c'est-à-dire le fuseau dont les deux demi-grands cercles sont perpendiculaires entre eux; la sphère entière se compose de quatre fuseaux rectangles. Si on désigne par F l'un de ces fuseaux, on a sphère $=$ 4F. On conclut de là

$$\frac{\text{fuseau PAP'B}}{\text{sphère}} = \frac{\text{fuseau PAP'B}}{4F} = \frac{\text{APB}}{4 \text{ droits}};$$

d'où, en simplifiant, $$\frac{\text{fuseau PAP'B}}{F} = \frac{\text{APB}}{1^{\text{dr.}}}.$$

Mais $\frac{\text{APB}}{1^{\text{dr.}}}$ est la mesure de l'angle APB. On peut donc dire que *si le fuseau rectangle est pris pour unité, le fuseau a même mesure que son angle.*

376. L'unité des surfaces sphériques *généralement adoptée* est le triangle *tri-rectangle.* On appelle ainsi un triangle dont les trois angles sont droits; nous n'en considérerons pas d'autre désormais.

Imaginons trois grands cercles perpendiculaires entre eux, deux à deux (*fig.* du nº 373); ils déterminent sur la sphère huit triangles sphériques tri-rectangles superposables. Si on appelle T l'aire du triangle tri-rectangle, on a donc sphère $=$ 8T. Il résulte de là que cette égalité, $\frac{\text{fuseau PAP'B}}{\text{sphère}} = \frac{\text{APB}}{4 \text{ droits}}$, équivaut à celle-ci : $\frac{\text{fuseau PAP'B}}{8T} = \frac{2\text{APB}}{8 \text{ droits}}$; d'où $\frac{\text{fuseau PAP'B}}{T} = \frac{2\text{APB}}{1 \text{ droit}}$.

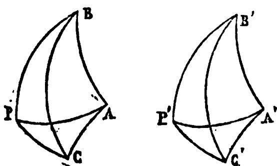
Un fuseau est au triangle tri-rectangle comme le double de son angle est à un angle droit. Ce que l'on exprime autrement en disant : *si l'unité des surfaces sphériques est le triangle tri-rectangle, un fuseau a pour mesure le double de son angle.*

Remarque I. Ce que nous venons de dire des fuseaux s'applique aux onglets, l'unité des volumes sphériques étant l'onglet rectangle, ou la pyramide triangulaire tri-rectangle.

Théorème.

377. *Deux triangles sphériques symétriques ont des surfaces égales.*

Soient ABC, A'B'C' deux triangles sphériques égaux dans toutes leurs parties, mais qui ne peuvent pas être superposés (nº 357). Soit P le pôle du cercle qui passe par les trois points A, B, C; joignons-le à ces points par des arcs de grands cercles PA, PB, PC; nous formons ainsi trois triangles isocèles PAC, PAB, PBC. Menons, par le point P', un arc de grand cercle B'P', de manière que l'angle C'B'P' $=$ CBP; prenons B'P' $=$ BP, et menons les arcs de grands cercles P'A', P'C'. Les triangles PBC, P'B'C' sont égaux dans toutes leurs parties, car ils ont un angle égal compris



entre deux côtés égaux ($PBC = P'B'C'$; $PB = P'B'$; $BC = B'C'$); ces triangles sont d'ailleurs isocèles, donc ils sont superposables (n° 360) et leurs aires sont égales. De plus, nous avons $AP = A'P'$ et l'angle $ABP = A'B'P'$; comme d'ailleurs $AB = A'B'$, les triangles ABP, A'B'P' sont égaux dans toutes leurs parties; ils sont isocèles; donc ils coïncident. De $BAP = B'A'P'$ et $BAC = B'A'C'$ on déduit que les angles PAC, P'A'C' sont égaux; comme $AC = A'C'$, $AP = A'P'$, les triangles APC, A'P'C' sont égaux dans toutes leurs parties; ils sont isocèles et superposables.

De l'égalité des aires des triangles que nous avons considérés, il résulte que l'aire de $ABC = ABP + APC - BPC$ égale l'aire de $A'B'C' = A'B'P' + A'P'C' - B'P'C'$. C. Q. F. D.

REMARQUE. Les pôles P et P' peuvent être situés dans les triangles, ou même sur les côtés; mais il résulte de l'égalité des triangles aux sommets P et P', qui se démontre de la même manière dans tous les cas, que le pôle est en même temps à l'intérieur des deux triangles, ou à l'extérieur, ou sur un côté; on conclut facilement de là l'égalité des aires des triangles proposés dans tous les cas.

COROLLAIRE. Deux pyramides sphériques symétriques (ayant pour bases des triangles sphériques symétriques) sont équivalentes.

Théorème.

378. *Si deux grands cercles* APA', BPB' *se coupent d'une manière quelconque sur un hémisphère* APA'B, *la somme des triangles opposés* APB, A'P'B' *est égale au fuseau dont l'angle est* APB.

Ce fuseau se compose des triangles APB, AP'B; il suffit donc de prouver que A'PB' est équivalent à AP'B. Pour cela, on observe que l'arc $A'PA = PAP'$; d'où, en ôtant la partie commune PA, on déduit $PA' = P'A$; de $B'PB = PBP'$ on conclut de même $PB' = P'B'$; de $A'B'A = B'AB$ on conclut $A'B' = AB$; les triangles A'B'P et ABP', ayant les côtés égaux chacun à chacun, sont égaux dans toutes leurs parties; ils sont symétriques (à cause de leur disposition); leurs aires sont égales (n° 377). Donc fuseau $AP'B = ABP + A'B'P$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. La somme des pyramides sphériques, qui ont les triangles PAB, PA'B', pour bases, est égale à l'onglet qui a le fuseau PAP'B pour base.

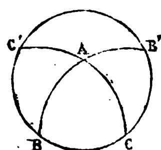
Théorème.

379. *La surface d'un triangle sphérique quelconque a pour mesure l'excès de la demi-somme de ses trois angles sur deux droits.*

C'est-à-dire que,

Le rapport de l'aire de ce triangle au triangle tri-rectangle, T, *est égal au rapport de l'excès susdit à un angle droit.*

Soit ABC le triangle sphérique proposé. Achevons la circonférence dont BC fait partie, et prolongeons BA et CA, à la rencontre de cette circonférence, en B′ et C′. (Il est nécessaire de prolonger ces arcs pour avoir leur deuxième rencontre avec cette circonférence, puisque chacun de ces arcs AB, CA est moindre qu'une demi-circonférence,) Cela fait, on remarque que ABC et ABC′ composent le fuseau dont l'angle est C; on conclut de là et du n° 376,



$$\frac{ABC + ABC'}{T} = \frac{\text{fuseau C}}{T} = \frac{2C}{1^{dr.}}; \qquad (1)$$

de même
$$\frac{ABC + AB'C}{T} = \frac{\text{fuseau B}}{T} = \frac{2B}{1^{dr.}}. \qquad (2)$$

Puis d'après le théorème précédent, $ABC + AB'C' = \text{fuseau A}$,

donc
$$\frac{ABC + A'B'C'}{T} = \frac{\text{fuseau A}}{T} = \frac{2A}{1^{dr.}}. \qquad (3)$$

Additionnant les égalités (1), (2), (3), membres à membres, on trouve

$$\frac{2ABC + ABC + ABC' + AB'C + AB'C'}{T} = \frac{2A + 2B + 2C}{1^{dr.}};$$

mais $ABC + AB'C + AC'B + AB'C'$ composent l'hémisphère entier; cette somme vaut donc 4 triangles tri-rectangles, 4T; on a donc

$$\frac{2ABC + 4T}{T} = \frac{2ABC}{T} + 4 = \frac{2(A + B + C)}{1^{dr.}};$$

en divisant par 2, puis retranchant 2 d'un côté, et $\frac{2^{dr.}}{1^{dr.}} = 2$, de l'autre, on obtient enfin

$$\frac{ABC}{T} = \frac{A + B + C}{1^{dr.}} - \frac{2^{dr.}}{1^{dr.}} = \frac{A + B + C - 2^{dr.}}{1^{dr.}}.$$

Ce qu'il faut démontrer.

Corollaire. On démontrerait de même qu'*une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure l'excès de la demi-somme des trois angles de sa base sur deux droits* (l'unité de volume étant la pyramide tri-rectangle, et l'unité d'angle l'angle droit).

Théorème.

380. *La surface d'un polygone sphérique a pour mesure la somme de ses angles, moins le produit de deux droits par autant d'unités, moins deux, qu'il y a de côtés dans le polygone.*

En effet, si on joint le sommet A du polygone à chacun des autres sommets, par un arc de grand cercle, le polygone se trouve décomposé en autant de triangles, moins deux, qu'il y a de côtés dans le polygone. En écrivant la mesure de chaque triangle d'après le théorème précédent, puis additionnant, on arrive aisément à la mesure du polygone telle qu'elle est énoncée.

Remarque. Soient, S, la somme des angles d'un polygone, et, n, le nombre de ses côtés; on a polygone $= \frac{S^{\text{dr.}} - 2^{\text{dr.}}(n-2)}{1^{\text{droit}}} = \frac{(S+4-2n)^{\text{droits}}}{1^{\text{droit}}}$.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

(*COURS DE TROISIÈME.*)

LEVÉ DES PLANS ET ARPENTAGE.

1. *Lever le plan d'un terrain*, c'est tracer en petit sur le papier une figure semblable à celle que forment son contour et les autres lignes ou points remarquables qu'il renferme.

2. Un pareil travail comprend deux séries d'opérations : 1° on mesure directement les longueurs et les angles qui déterminent la figure en question, et on les inscrit sur un croquis du terrain fait à main levée; ces premières opérations constituent *le levé du plan*, proprement dit; 2° faisant usage de ces longueurs et de ces angles, on trace ensuite sur le papier, avec régularité, et dans des proportions déterminées, une figure semblable au terrain; cela s'appelle *rapporter le plan*.

3. Dans un *plan géométral* le terrain est supposé *horizontal*, ou plutôt, projeté sur un plan horizontal; c'est-à-dire que, sans tenir compte des différences de hauteur que présentent ses divers points au-dessus d'un même plan horizontal, on construit seulement sur le papier une figure semblable à celle que déterminent les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur ce plan horizontal.

4. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que l'on opère sur un terrain où les longueurs et les angles peuvent être, sans difficulté, mesurés *horizontalement*.

Les opérations préliminaires, nécessaires dans le cas où les différences de niveau seraient assez grandes pour qu'on dût en tenir

compte, seront traitées dans une autre partie du cours (*le nivellement*).

TRACÉ ET MESURE D'UNE DROITE.

5. Des jalons. Pour tracer une droite sur le terrain on se sert de jalons. On appelle ainsi des baguettes de bois léger et bien ébranchées (*fig.* 1) (en coudrier, bourdaine, saule, osier, etc.) ayant environ 1 mètre et demi de long, et 2 à 3 centimètres de grosseur au milieu; ils servent à déterminer les alignements. L'extrémité inférieure qu'on enfonce en terre est pointue; l'autre est fendue et reçoit un morceau de papier ou une carte, pour servir de point de mire. Les jalons doivent être placés bien verticalement (au moyen du fil à plomb).



6. Tracé d'une droite. Quand la distance est peu considérable on plante simplement un jalon à chaque extrémité; mais si cette distance est assez grande, ayant placé des jalons ou des signaux quelconques aux deux extrémités, on plante des jalons entre ces signaux, en procédant comme il suit :

Le géomètre se place à quelques pas du jalon A et vise le jalon

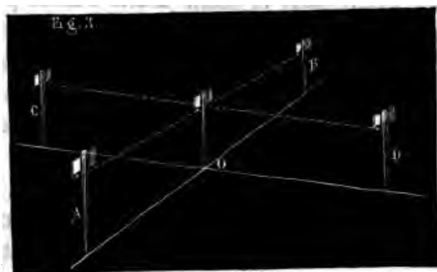


ou signal situé en B (*), de manière que celui-ci soit caché par le jalon A; ensuite il fait placer par un aide des jalons intermédiaires *m*, *n*, de telle manière qu'ils soient cachés par le jalon A, et qu'on ne les voie ni à droite ni à gauche de la ligne visuelle passant par AB; on parvient ainsi à tracer la ligne A*mn*B; c'est ce que l'on appelle prendre un *alignement*, ou bien *jalonner* entre deux points.

(*) On place quelquefois à l'extrémité B un *voyant*, c'est-à-dire un rectangle en fer-blanc dont les deux moitiés sont de couleurs différentes, et qui peut glisser dans une règle plantée verticalement. Les voyants sont employés à défaut de signaux naturels.

Pour prolonger une droite jalonnée AB, il suffit évidemment de se placer à quelques pas du point A, de manière que le jalon A cache le jalon B, puis, de faire placer, au delà de B, un jalon C qui soit alors caché par B, etc.

7. Pour marquer sur le terrain le point de rencontre, O, de deux droites jalonnées AB, CD (*fig.* 3), l'arpenteur se place en A, et vise



le point B; l'aide marche dans la direction CD, jusqu'à ce que l'arpenteur le voie arriver sur l'alignement AB; l'aide marque alors sa position par un jalon O.

8. De la chaîne. *La chaîne d'arpenteur* est un instrument qui sert à mesurer sur le terrain les distances un peu considérables. Elle est ordinairement composée de cinquante chaînons ou tiges en gros fil de fer, bouclés à leurs extrémités et réunis par des anneaux (*fig.* 4). La distance comprise entre les centres de deux anneaux consécutifs est égale à deux décimètres, de sorte que la longueur totale de la chaîne, en y comprenant deux poignées de fer qui la terminent, est de 10 mètres (*). Les anneaux sont en fer excepté ceux qui indiquent les mètres, que l'on fait en laiton. L'anneau du milieu est un peu plus fort que les autres.



(*) Chaque poignée et le chainon adjacent (plus court que les autres), forment à eux deux un double décimètre. On donne d'ailleurs à la chaîne quelques millimètres de plus, afin de compenser l'erreur produite par le défaut de tension absolue.

9. REMARQUE. A chaque opération on exerce sur la chaîne un effort qui doit bientôt l'allonger ; il est donc nécessaire de la vérifier souvent à l'aide d'un décamètre étalon.

10. MESURER UNE PORTION DE DROITE. Pour cela on est deux, l'arpenteur et un aide ou porte-chaîne. L'arpenteur appuie l'une des poignées de la chaîne *extérieurement* contre l'extrémité A de la ligne (*fig.* 2). L'aide, ayant dans la main droite l'autre poignée de la chaîne, et dans la gauche dix fiches ou pointes en fer (*fig.* 5), marche de A vers B, tendant la chaîne dans l'alignement déterminé par les jalons ; cela fait, il plante une première fiche, en l'appuyant *intérieurement* contre la poignée de la chaîne ; puis l'arpenteur et son aide vont en avant, en soulevant la chaîne, jusqu'à ce que le premier soit arrivé à la fiche plantée par le second ; il s'y arrête et applique sa poignée contre cette fiche, pendant que l'aide, ayant tendu de nouveau la chaîne, place une deuxième fiche, et ainsi de suite. L'arpenteur ramasse chaque fois la fiche à laquelle il vient de s'arrêter ; quand il a les dix fiches en main, il les rend à son aide, et marque sur son carnet une portée de 100 mètres. Quelquefois on remplace chaque dixième fiche par un piquet qui reste jusqu'à la fin de l'opération.



Ordinairement une distance se compose d'un certain nombre de longueurs de chaîne, plus une fraction de cette longueur. Pour mesurer cette fraction on emploie les chaînons, et ensuite un mètre divisé.

11. MÈTRE DE POCHE. Quand on veut lever le plan d'une maison, d'un appartement, d'une cour, d'un terrain de peu d'étendue, on se sert avec avantage du *mètre de poche* ; c'est un ruban de 5 à 10 mètres, divisé en centimètres, et qui s'enroule sur l'axe d'une boîte en cuir bouilli, de forme cylindrique. Cet instrument est commode pour mesurer la longueur d'un mur, la largeur d'une porte, d'une cheminée, etc.

12. ÉCHELLE DE RÉDUCTION. On appelle *échelle de réduction*, ou simplement *échelle* le rapport constant qui existe entre chaque distance du terrain et celle qui la représente sur le plan. Ex. : Si une distance de 1000 mètres est représentée par un décimètre,

on dit que le plan est à l'échelle de $\frac{1}{10000}$. Ce rapport est ordinairement de 1 à 100, de 1 à 500, de 1 à 1000...; le dénominateur ne renferme pas en général d'autres facteurs premiers que 2 et 5. Ex. : La grande carte de France du dépôt de la guerre est à l'échelle de $\frac{1}{80000}$ (*).

13. On donne aussi le nom d'*échelles* à des figures géométriques servant à trouver aisément la longueur qui, sur le plan, doit représenter une distance donnée sur le terrain, ou, réciproquement, à évaluer une distance du terrain d'après la longueur qui la représente sur le plan.

14. Échelle d'un plan. La plus simple de ces figures est une droite divisée dont chaque plan est toujours accompagné. Sur cette droite sont indiquées les longueurs qui représentent sur le plan des distances de 1 mètre, 10 mètres, 100 mètres, etc., mesurées sur le terrain; supposons que la plus grande dimension du terrain ne dépasse pas 100 mètres, et que l'échelle de réduction soit 0,001; un

[redacted]

mètre du terrain sera représenté par un millimètre. On trace une ligne CAB de 11 centimètres (*fig.* 6), que l'on divise en onze parties égales; on subdivise la première division à gauche, AC, en dix parties égales qui sont des millimètres. Chaque division de AB représente 10 mètres; chaque division de AC représente 1 mètre. Pour représenter sur le plan une longueur de 65 mètres, on compte six divisions à droite de A, et cinq à gauche; *ih* est la longueur cherchée.

Il n'est pas nécessaire que la longueur de l'échelle corres-

(*) Pour le cadastre, on fait généralement usage de l'échelle de 1 à 2500; pour les plans des détails de forêts, des masses étendues et des pays à grande culture, on emploie l'échelle de 1 à 5000. Dans les levés de petites étendues, il est avantageux d'adopter l'échelle de 0,01 ou de 0,001, afin de pouvoir se servir du mètre divisé en centimètres et millimètres, dont l'usage est si général et si commode.

ponde à la plus grande dimension du terrain; car on peut porter plusieurs fois la même longueur dans la direction d'une même droite du plan.

15. Il y a une échelle beaucoup plus commode, mais dont la construction est un peu plus compliquée, nommée échelle des dixmes, ou échelle décimale. Nous la décrirons dans une autre partie du cours.

16. LEVÉ AU MÈTRE. Le seul instrument qu'on emploie pour le levé au mètre est la chaîne ou le mètre de poche. Supposons qu'on ait à lever un terrain limité par le contour ABCDE (*fig.* 7); on mesurera d'abord les côtés AB, BC, ... de ce polygone, puis à partir du sommet A on prendra sur les côtés AE, AB, deux longueurs quelconques AA', AA", de 10 mètres par exemple, et l'on mesurera A'A"; on connaîtra ainsi les trois côtés du triangle AA'A". En faisant la même opération à tous les autres sommets, on connaîtra les côtés des triangles BB'B", CC'C", etc.



Ces mesures étant prises et inscrites sur un croquis du terrain (une représentation à main levée, 1er dessin, *fig.* 7), on trace une ligne quelconque sur la feuille de papier destinée à recevoir le plan, et on prend sur cette ligne une longueur, *ae*, représentant, à l'échelle de réduction, la ligne AE; on prend sur *ae* une longueur *aa'* = AA' réduit à l'échelle; puis, sur *aa'*, on construit le triangle *aa'a"* ayant pour côtés AA', AA", A'A", réduits *à l'échelle; aa'a"* est semblable à AA'A". L'angle *a"aa'* étant égal à A"AA', le côté *aa"* est la direction de la ligne AB du terrain; on prend, à partir de *a*, sur cette direction, une longueur *ab* pour représenter AB. Le point *b*, ainsi obtenu, correspond au point B du terrain; on opère au point *b* comme au point *a*; on construit de même le triangle *b"bb'* semblable au triangle B"BB', et on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait rapporté sur le plan tous les sommets du polygone. On a une vérification des constructions effectuées; car le dernier sommet, *e*, trouvé directement dans la suite des con-

structions, doit se trouver à l'extrémité du côté *ae* que l'on a tracé tout d'abord.

Pour relever un point M, situé à l'intérieur ou à l'extérieur du contour ABCDE, on joint ce point aux extrémités de l'un des côtés du polygone, AB par exemple, et l'on relève, en suivant la méthode qui précède, le triangle ABM, dont le côté AB est déjà représenté par *ab*.

17. On peut aussi, si on le trouve plus commode, mener les diagonales du polygone qui enferme le terrain, et mesurer directement les diagonales en même temps que les côtés; on connaît ainsi les 3 côtés de chacun des triangles qui composent ce polygone; il ne reste plus qu'à rapporter le plan, c'est-à-dire à employer ces longueurs réduites pour construire sur le papier des triangles semblables à ceux du terrain, et semblablement disposés.

18. *Le levé au mètre* est employé pour lever le plan d'un terrain de peu d'étendue, d'une chambre, d'une cour, d'un jardin; dans les autres cas, on ne l'emploie qu'à défaut d'instruments autres que la chaîne.

DE L'ÉQUERRE D'ARPENTEUR.

19. Outre la chaîne, un arpenteur est généralement muni d'un instrument spécial qu'on appelle *équerre d'arpenteur*.

L'*équerre d'arpenteur* est un instrument qui sert à mener des lignes perpendiculaires ou parallèles à d'autres lignes données. Cet instrument a plusieurs formes : ou bien c'est un *prisme droit*, régulier (*fig.* 8), ou bien c'est un cylindre ayant pour base un octogone (hauteur 8 centimètres, diamètre 6 centimètres).



Nous ne décrirons que le premier, qui est le plus solide et le plus commode. L'instrument est en cuivre, il a huit *fentes* ou *pinnules* placées à 45° l'une de l'autre, suivant la ligne qui divise en deux parties égales chaque pan du prisme dans le sens de sa longueur. Quatre de ces ouvertures opposées deux à deux, AB, etc., sont moitié croisée

(pinnule large), en A, et moitié fente en B, disposées de telle manière que la croisée A d'un pan correspond à la fente du pan opposé, et *vice versâ* (V. n° 26). Chaque croisée est garnie d'un fil de soie ou d'un crin très-fin. Les quatre autres pinnules, C,... sont des traits de scie en ligne droite, surmontés d'une petite ouverture ronde.

Un pied d'environ 50 centimètres de long, ou plus, suivant la grandeur de l'arpenteur, supporte l'équerre à l'aide d'une douille: c'est le bâton de l'équerre; il est quelquefois divisé en décimètres et centimètres, et peut servir à vérifier la chaîne. L'autre bout du bâton est garni d'une pointe en fer qui pénètre facilement dans la terre lorsqu'on veut y planter l'instrument.

20. *Mener une perpendiculaire en un point* C *d'une droite donnée* AB (*fig.* 9).

On plante l'équerre verticalement au point C, de manière que le point A étant vu à travers deux pinnules opposées, on voie le point B à travers les mêmes pinnules, en regardant dans l'autre sens. Cela fait, on vise à travers les pinnules de la direction perpendiculaire à cette première AB, et on fait placer, par un aide, un jalon, D, qui soit vu de C sur cette nouvelle direction. La ligne CD est la perpendiculaire cherchée. En répétant cette construction, on peut mener des parallèles.

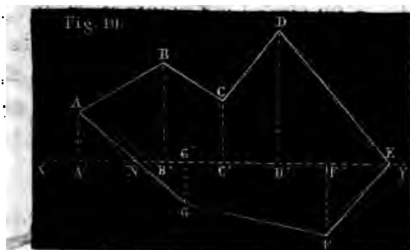


21. *Abaisser d'un point donné* D, *extérieur à une droite* AB, *une perpendiculaire sur cette droite* (*fig.* 9).

L'arpenteur, muni de son équerre, apprécie à peu près la position du pied de la perpendiculaire; il place son équerre au pied présumé, comme s'il voulait mener en ce point une perpendiculaire à AB; s'il voit, à travers les pinnules, le jalon D à droite ou à gauche de la direction perpendiculaire à AB, il avance son équerre, en tâtonnant, du côté du point D, jusqu'à ce qu'il ait ce point D sur la direction de sa perpendiculaire.

Il faut une grande habitude pour déterminer ainsi le pied d'une perpendiculaire.

22. *Levé à l'équerre.* Un point B est déterminé sur un plan quand on connaît sa distance BB′ à une droite donnée XY, et la distance, A′B′, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et un point fixe, A′, de la droite XY (*fig.* 10). D'après cela, pour lever à l'équerre le plan d'un terrain tel que ABCDE, on prend une *base* XY, sur laquelle on abaisse des perpendiculaires AA′, BB′..., au moyen de l'équerre; puis on mesure les distances AA′, BB′....; et sur XY, les distances A′B′, A′C′...; ces distances mesurées et notées sur un croquis, on mène sur le papier une ligne indéfinie xy (*fig.* 10 *bis*), sur laquelle on prend, à partir d'un point quelconque a' et dans le sens indiqué par le croquis, une longueur $a'b'$ représentant A′B′, réduit à l'échelle, puis $b'c'$=B′C′ réduit, etc. A chacun des points a', b', c', on mène une perpendiculaire à xy; on prend sur la première $a'a$ représentant A′A, sur la seconde $b'b$ représentant B′B, et ainsi de suite, ces perpendiculaires étant menées dans le sens indiqué par le croquis. Cela fait, on tire les lignes $a'b'$, $b'c'$, etc. Pour relever un point quelconque M du terrain, on fait exactement comme pour les sommets A, B,... du contour.





23. Remarques. La méthode des perpendiculaires convient particulièrement à un terrain long et étroit. Dans ce cas, on n'a besoin que d'une seule base choisie dans la situation la plus avantageuse pour la construction des perpendiculaires et la mesure des longueurs. Si le terrain a une certaine étendue, on peut faire usage de plusieurs bases, en rattachant les bases auxiliaires à la base principale, exactement de la même manière qu'on y rattache une ligne AB quelconque.

24. Le levé à l'équerre peut encore servir avantageusement pour lever le plan d'un terrain limité par une ligne sinueuse, une rivière par exemple ; on abaisse des perpendiculaires d'un certain nombre de points M, N, P,... de cette ligne courbe sur une base choisie convenablement ; on opère, pour lever chacun de ces points et les rapporter sur le plan, exactement comme on vient de le dire pour les points A, B, C,... on choisit ces points M, N, P,... assez nombreux et assez rapprochés pour qu'on puisse considérer les portions de la courbe comprises entre ces points, pris 2 à 2, comme de petites lignes droites. (Voyez les figures page 257, au chapitre de l'arpentage.)

DU GRAPHOMÈTRE.

25. Le *graphomètre* sert à mesurer les angles ; il se compose d'un demi-limbe circulaire gradué (*fig.* 11) (exactement semblable au rapporteur, n° 114), et de deux alidades à pinnules (n° 27), l'une fixe C'C, dirigée suivant le diamètre du limbe et faisant corps avec lui ; l'autre B, mobile autour du centre du limbe, et située dans son plan (*). La direction de l'alidade fixe CC' s'appelle *la ligne de foi.*

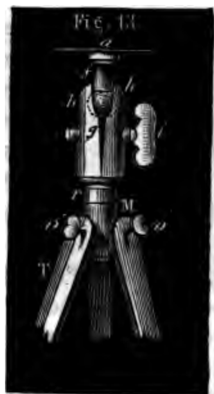


Le limbe du graphomètre porte, comme le rapporteur décrit livre II, n° 14, une double graduation en demi-degrés, de 0° à 180°. Les pinnules *c*, *c'* de l'alidade fixe doivent être disposées de manière que la ligne des deux points du limbe mar-

---

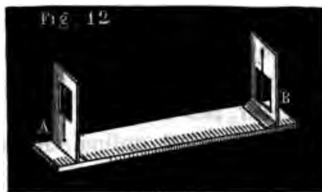
(*) En outre l'alidade mobile porte à ses extrémités des verniers dont les zéros sont situés dans le plan des fils des pinnules *b* et *b'* (V. ce qui concerne le vernier dans la Physique ou dans le volume de Mathématiques appliquées.

qués 0 soit dans le plan des fils. Le limbe est fixé par son centre *a* (*fig.* 13), à une tige *ff* qui traverse à frottement une sphère *ge* d'environ 0,02 de diamètre. Cette sphère est embrassée par deux coquilles *h* que l'on peut rapprocher au moyen d'une vis *i* de manière à la fixer. Cet assemblage porte le nom de *genou à coquilles*. Il est terminé par une douille, *r*, cylindre creux, dans lequel s'emmanche l'axe M d'un trépied T qui porte l'instrument. Les trois branches en bois de ce trépied, terminées en fer de lance, s'appliquent au moyen de vis de pression, *v*, *v'*, contre les faces du manche M ci-dessus indiqué.



26. On nomme *pinnule* (*fig.* 11 et 12) une plaque A de cuivre portant, dans le sens de sa longueur, deux fentes situées l'une au-dessus de l'autre. L'une de ces fentes, qui est très-étroite, est appelée *œilleton;* l'autre, assez large, s'appelle une *croisée*. Un fil très-fin, dirigé dans le sens de la longueur de la pinnule, divise la croisée en deux parties égales.

27. *L'alidade à pinnules* (*fig.* 12) est une règle portant perpendiculairement à ses deux extrémités deux pinnules. Dans l'une d'elles A, l'œilleton est en bas; dans l'autre, B, au contraire, c'est la croisée qui occupe la partie inférieure, et l'œilleton la partie supérieure. Par cette disposition, on aperçoit le fil de l'une quelconque des croisées, en approchant son œil de l'œilleton opposé; la direction du rayon visuel qui va à ce fil prend le nom de ligne de visée. Un point visé doit être caché par le fil.



Quand on vise une ligne jalonnée, le premier jalon visible doit cacher les suivants, et être coupé lui-même dans le sens de sa hauteur par les fils réunis des pinnules opposées.

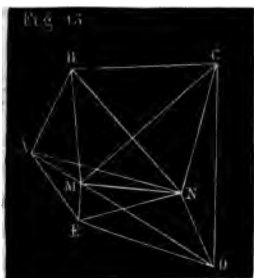
28. Pour mesurer un angle, BAC (*fig.* 14), avec le graphomètre, il suffit de connaître le sommet A, et un point bien indiqué sur chaque côté; on commence par assujettir, à frottement doux, le genou de l'instrument; puis on dispose le pied de manière que l'axe de la pièce M, dirigé verticalement, passe par le sommet, A, de l'angle cherché; on se sert pour cela d'un fil à plomb attaché à cette pièce M et qu'on laisse tomber. Le pied étant convenablement disposé, on serre les vis de pression v et v', puis on dispose le graphomètre à l'aide de sa douille; on fait tourner la sphère g entre les coquilles jusqu'à ce que le plan du limbe contienne les deux points B et C; avec un peu d'habitude on y arrive après quelques tâtonnements. Enfin on fait tourner le limbe, dans son plan, jusqu'à ce que la *ligne de foi* ait la direction, AC, de l'un des côtés de l'angle, et on fait mouvoir l'alidade mobile jusqu'à ce que sa ligne de visée coïncide avec la direction de l'autre côté, BC. L'arc B'C', alors compris entre le zéro du limbe et le zéro du vernier (le point qui correspond au fil de la croisée mobile) donne la mesure de l'angle.



29. LEVÉ AU GRAPHOMÈTRE. *Méthode par intersections.* La mesure directe des longueurs sur le terrain, même quand il s'agit d'un levé peu important, présente toujours de grandes difficultés; il peut même arriver que des accidents de terrain, des obstacles la rendent impraticables. L'emploi du graphomètre est ordinairement plus rapide et plus commode, et donne des résultats plus exacts.

(*) Les alidades du graphomètre peuvent être remplacées avantageusement par des lunettes munies de *réticules* (V. la Physique ou la Cosmographie). L'une d'elles est fixée au-dessous du limbe suivant son diamètre; l'autre peut tourner autour du centre du limbe, au-dessus; chacune d'elles est munie d'une vis de pression qui permet, étant desserrée, de lui donner un mouvement rapide; une vis de rappel sert à lui donner un mouvement lent. Avec les alidades à lunettes on obtient plus de précision dans la visée.

Soit ABCDE (*fig.* 15) le terrain dont on veut lever le plan. On commence par mesurer, à la chaîne, avec beaucoup de soin une droite, MN, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir les signaux A, B, C, D, E; cette droite est ce qu'on appelle une *base*. On place le graphomètre en M, et on mesure les angles AMN, BMN...; puis on se transporte en N, et on mesure les angles ANM, BNM... Après ces opérations le plan est *levé;* il ne reste plus qu'à le *rapporter* (n° 2).



Pour cela on trace sur le papier une ligne *mn* représentant la base MN, à l'échelle adoptée (n° 12); puis on construit successivement, à l'aide du rapporteur (n° 114), les triangles *amn*, *bmn*, etc., dont on connaît les angles. En joignant les points *a*, *b*, *c*..., on a sur le plan tous les points qu'on veut y rapporter (*).

30. *Méthode par cheminements.*

Le procédé précédent porte le nom de *méthode par intersections*. Il n'est guère applicable quand il s'agit de lever le plan d'un bois, ou de tout autre terrain gêné par des obstacles nombreux. Dans ce cas on a recours à la méthode par cheminements; c'est-à-dire que, cheminant le long du contour ABCDE, on mesure successivement les côtés et les angles du terrain. On ne doit pas oublier alors d'appliquer comme moyen de vérification le théorème relatif à la somme des angles d'un polygone (n° 35).

31. Remarque. L'emploi du graphomètre permet d'obtenir les angles avec une assez grande exactitude; si on mesure la *base* avec grand soin, on a par son moyen une représentation assez exacte de la figure qu'on veut reproduire sur le papier.

(*) Les triangles *amn*, *bmn*, ... sont respectivement semblables à AMN, BMN, etc., d'où résulte $\frac{AM}{am}=\frac{MN}{mn}$; $\frac{BM}{bm}=\frac{MN}{mn}$, etc., d'où $\frac{AM}{am}=\frac{BM}{bm}$; etc. Les triangles AMB, *amb* sont semblables comme ayant un angle égal compris entre leurs côtés proportionnels, etc.

LEVÉ A LA PLANCHETTE.

32. Quand on n'a pas besoin d'une très-grande précision et qu'on veut opérer rapidement, on fait usage d'un instrument à l'aide duquel *on peut à la fois lever et rapporter le plan.*

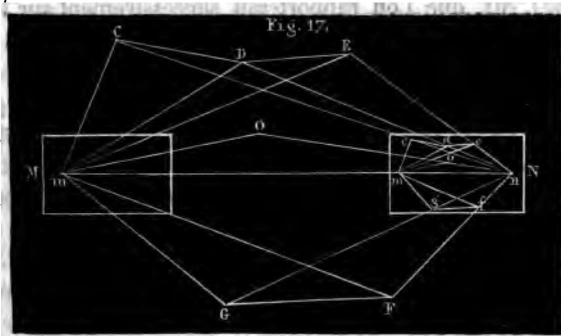
Planchette. La *planchette* est une planche à dessiner, parfaitement dressée (*fig.* 16), sur laquelle on tend une ou plusieurs feuilles de papier, au moyen de deux petits cylindres mobiles sur leurs axes, disposés à cet effet sur les bords de la planchette. Celle-ci est supportée, comme le graphomètre, par un genou à coquilles et un pied à trois branches. Un petit niveau à bulle d'air que l'on pose sur la planchette, dans différentes positions, permet de rendre la planche horizontale.


Fig. 16.

La partie mobile de cet instrument est un alidade à deux pinnules verticales, AB (n° 27). Elle est évidée de manière que son bord intérieur soit dans le plan vertical qui passe par les deux axes (les fils) des pinnules.

Lever un angle. Pour lever un angle au moyen de la planchette, on la place de manière qu'un point *a* de la planchette soit sur la verticale qui passe par le sommet A de l'angle; un fil à plomb partant de *a*, que l'on laisse tomber, aide à remplir cette première condition; on enfonce ensuite en *a* une aiguille très-fine; appuyant le bord intérieur de la règle contre cette aiguille, on vise un jalon B, ou un signal quelconque, placé dans l'alignement AC d'un des côtés de l'angle, et on trace une ligne *ab* le long de la règle, avec un crayon très-fin. Enfin on vise de même un jalon C, ou un signal, placé dans la direction du second côté de l'angle; on tire *ac*; l'angle cherché *bac* se trouve ainsi dessiné sur la planchette.

33. Levé a la planchette. *Méthode par intersections*. Supposons que l'on veuille lever, au moyen de la planchette, le plan d'un terrain MGFNEDC (*fig.* 17), on choisit sur le terrain une base MN, des



extrémités de laquelle on puisse aisément apercevoir les points qui doivent être rapportés sur le plan. Ayant mesuré cette base avec le plus grand soin (n° 10), on établit au point M la planchette sur laquelle on marque le point *m* situé sur la verticale de M (comme il vient d'être dit tout à l'heure pour les points *a*, A). Cela fait, on vise successivement les points à relever C, D,... et le point N situé sur la base, que celui-ci fasse ou non partie du contour. Ayant ainsi tracé successivement des lignes *mc*, *md*,... *mn*, dans les directions MC, MD,... MN, on prend sur *mn* une longueur, *mn*, qui représente la longueur connue de MN, à l'échelle de réduction; on transporte ensuite l'instrument au point N, où on le dispose de manière que *n* soit sur la verticale de N et que la ligne *nm* soit dans la direction NM. Cela fait on vise successivement de *n* les points C, D, E..., déjà visés de *m*, et on trace successivement les lignes *nc*, *nd*, *ne*,.... La ligne *nc* qui va de *n* au jalon C coupe la ligne *mc* au point *c*; *nd* coupe *md* au point *d*, etc. Tous les points ayant été ainsi visés de *n*, on a sur la planchette le plan *mgfnedc* du terrain, à l'échelle adoptée (*).

(*) Il est facile de vérifier la similitude des figures MGFNEDC, *mgfnedc*. En effet, les triangles homologues MNC, *mnc*, qui ont pour bases MN, *mn*, sont évidemment semblables comme équiangles; d'où résulte $\frac{MC}{mc} = \frac{MN}{mn}$; de

Relever un point intérieur ou extérieur au contour. Si on voulait relever un point quelconque O, situé à l'intérieur ou à l'extérieur du contour MGFNEDC, il suffirait de le rattacher à la base par les lignes MO, NO, que l'on rapporterait successivement sur la planchette, comme on a fait pour chacun des points C, D, etc...

34. *Méthode par cheminement*. Dans le levé à la planchette, on peut substituer la *méthode par cheminement* à la méthode par intersections quand des habitations, des arbres (une forêt), ou d'autres obstacles, rendent cette dernière difficile ou impraticable. Ainsi que nous l'avons dit à propos du levé au graphomètre, on se transporte successivement à chacun des sommets M, G, F, etc., du contour, et on relève les angles MGF, GFN, etc. Pour que le plan soit immédiatement rapporté, ayant levé la direction MG, on prend *mg* égal à MG, réduite à l'échelle; puis ayant transporté la planchette en G, on la dispose de manière que *g* corresponde à G, et la ligne *gm*, déjà tracée, avec la direction GM; puis on vise GF; on prend sur cette direction $gf = \text{GF}$ (à l'échelle), et on se transporte en F, en mettant *f* au-dessus de F, et *fg* dans la direction FG, etc.

35. La méthode par intersections, soit qu'on emploie le graphomètre (n° 29), soit qu'on fasse usage de la planchette, offre l'avantage de n'exiger que la mesure d'une seule base et deux stations seulement, l'une en A, l'autre en B pour mesurer les angles. Il importe en effet d'éviter la mesure de plusieurs grandes lignes, et les stations trop nombreuses, parce que chaque opération demande un temps assez long et des soins particuliers pour disposer la planchette ou le graphomètre (*).

Nous avons signalé en commençant l'avantage qu'offre la planchette de donner immédiatement sur le papier le plan qu'on lève, sans aucune opération de cabinet.

---

même $\frac{\text{MD}}{md} = \frac{\text{MN}}{mn}$; donc $\frac{\text{MC}}{mc} = \frac{\text{MD}}{md}$. D'ailleurs les deux angles CMD, *cmd* sont égaux comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens (l'angle CMD, une fois tracé, n'ayant fait que glisser parallèlement le long de MN); les triangles CMD, *cmd* sont donc semblables (n° 148).

(*) Néanmoins il faut observer que cette méthode n'est pas toujours susceptible d'une très-grande rigueur. Un point est toujours assez mal déterminé par l'intersection de deux droites, quand ces lignes se rencontrent sous un angle

PROBLÈMES RELATIFS AU LEVÉ DES PLANS.

Problème.

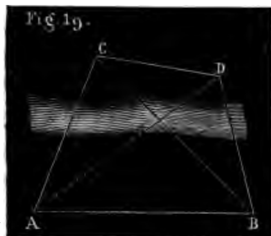
36. *Déterminer la distance d'un point accessible*, A, *à un point inaccessible, mais visible*, C (*fig.* 18).

On chaîne, à partir d'un point A, une base AB; on mesure ensuite avec le graphomètre les angles A et B; cela fait, on rapporte ces angles sur le plan (au moyen du rapporteur), aux deux extrémités d'une ligne *ab*, représentant AB, réduite à l'échelle. Ayant construit le triangle *abc*, on mesurera *ac*, à l'aide de l'échelle, et on en conclura la valeur de AC, d'après le rapport de similitude; ex. : si l'échelle est à $\frac{1}{1000}$, on multipliera *ac* par 1000.

On peut également se servir de la planchette. A défaut de graphomètre et de planchette, on jalonne les directions AA'C, BB'C, et on lève le triangle ACB *au mètre*, comme il a été indiqué n° 16.

Problème.

37. *Déterminer la distance de deux points inaccessibles, mais visibles* (*fig.* 19).



On mesurera une base AB; puis, au moyen de la planchette ou du graphomètre, on construira un polygone *abcd* semblable au polygone ABCD; la ligne *cd*, mesurée, et ramenée à la grandeur naturelle, d'après l'échelle, sera la distance cherchée.

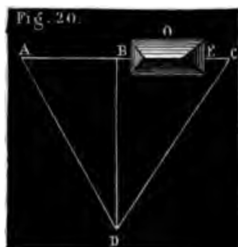
---

très-aigu, parce que, en raison de leur épaisseur, le lieu de leur rencontre est une espèce de losange dans lequel il faut distinguer le point d'intersection (V. la *fig.* 17). Pour éviter, autant qu'on le peut, cet inconvénient, il faut choisir la *base* aussi grande que possible, à peu-près le cinquième ou le sixième de la plus grande des lignes que l'on peut avoir à mener de l'une de ses extrémités aux points du terrain. Il faut encore avoir soin de choisir cette base de manière qu'il ne se trouve aucun point remarquable du terrain sur son prolongement, ou très-près de ce prolongement; car pour ce point la construction serait illusoire.

Problème.

38. *Prolonger une droite*, AB, *au delà d'un obstacle* O (*fig.* 20).

On établira une station en un point D, d'où l'on puisse apercevoir la droite AB, l'obstacle O, et le terrain sur lequel doit être prolongée la droite; on chaînera AB, AD, BD; on jalonnera une direction arbitraire, DC, aboutissant au delà de l'obstacle, et on mesurera avec le graphomètre l'angle BDC; on connaît l'angle ABD par la construction du triangle ABD; on peut donc construire sur le papier un triangle *bdc* semblable à BDC, sur un côté, *bd*, homologue à BD. On connaîtra ainsi *dc* homologue à DC; on ramènera *dc* à la grandeur naturelle au moyen de l'échelle, et on portera cette longueur dans l'alignement DC; ce qui donnera le point C situé sur le prolongement de AB. On pourra déterminer de la même manière un autre point situé au delà de l'obstacle, sur la même direction. Dès lors la droite pourra être prolongée aussi loin qu'on voudra.

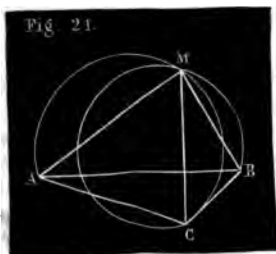


Problème.

39. *Trois points* A, B, C *étant situés sur un terrain uni, et rapportés sur une carte en* a, b, c, *déterminer sur cette carte le point* M, *d'où les distances* AC, BC *ont été vues sous des angles connus* (*fig.* 21).

On obtient le point *m* homologue au point M en décrivant sur *ac* un segment de cercle capable de l'angle AMC, et sur *bc* un segment capable de l'angle BMC; le point *m* où ces deux arcs se coupent une seconde fois, est la position cherchée de M sur la carte.

Ce problème s'applique quand on n'a qu'un seul point à déterminer sur un terrain dont on a déjà le plan.

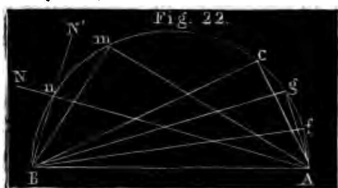


Ainsi qu'on le voit, il n'exige dans ce cas qu'une seule station, et n'oblige à la mesure d'aucune longueur.

Problème.

40. *Par trois points donnés*, A, B, C, *sur un terrain* (*fig.* 22), *faire passer une circonférence lors même qu'on ne peut approcher du centre.*

On peut obtenir chaque point *n* de la circonférence par l'opération suivante : Ayant mesuré au graphomètre les angles CBA, CAB, on jalonnera une direction quelconque AN; ayant mesuré l'angle NAB on construira l'angle N'BA = CBA + CAB—NAB. Le point de rencontre, *n*, de la ligne AN et de la ligne BN', ainsi déterminée, appartient à la circonférence demandée. Il résulte, en effet, de l'égalité précédente, que la somme des angles à la base *n*AB, *n*BA, du triangle AB*n*, est égale à la somme des angles à la base, CBA + CAB, du triangle ACB; donc le sommet, *n*, de A*n*B = ACB est sur l'arc du segment de cercle capable de l'angle ACB, construit sur AB comme corde. En répétant cette opération un aussi grand nombre de fois que l'on veut, et en rapprochant suffisamment les lignes issues de A, on obtient autant de points de la circonférence demandée, aussi rapprochés que l'on veut; on les réunit par une ligne continue, qui est approximativement celle qu'on cherche. On obtient la partie de la circonférence située de l'autre côté de AB par rapport au point C, en employant, de ce côté, le supplément de l'angle ACB comme on vient d'employer celui-ci.



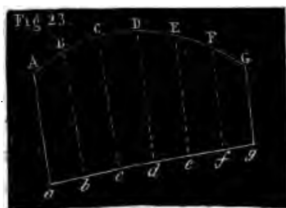
41. Remarque. On peut abréger l'opération et lui donner une certaine régularité en procédant comme il suit : On divise l'angle CAB en un certain nombre de parties égales (8 par exemple), et on numérote les lignes de division de 1 à 8, à partir de CA exclusivement. On fait au point B, avec BC, en dehors de l'angle CBA, des angles égaux à chacune des parties de A; on numérote les nouvelles lignes, de 1 à 8, en partant de BC exclusivement. Les points

de rencontre des lignes portant les mêmes numéros sont des points de la circonférence cherchée. En effet, supposons que les lignes AN, BN′ portent toutes deux le n° 5, et soit a l'une des 8 parties de A. On a $CAn = 5a$; d'où $nAB = 3a$; d'un autre côté, $nBC = 5a$; donc $nBA = nBC + CBA = 5a + CBA$; donc $nAB + nBA = 3a + 5a + CBA = CAB + CBA$, et enfin $AnB = ACB$. C. Q. F. D.

NOTIONS SUR L'ARPENTAGE.

42. L'arpentage a pour objet la mesure de la surface des terrains. Les instruments de l'arpenteur sont l'équerre et la chaîne, dont nous avons donné la description (nos 8 et 19). Nous avons indiqué en géométrie, Livre IV, n° 192, la marche à suivre pour obtenir l'aire d'un polygone. Cette méthode est applicable à la mesure d'un terrain quelconque terminé par des lignes droites. Voyez, par exemple, la figure 10, page 245; la surface de terrain ABCDEFG (dont on peut lever le plan, si on veut), est une somme de triangles rectangles et de trapèzes dont il faut retrancher le triangle AA′N; on calcule les aires de toutes ces figures à l'aide des longueurs AA′, BB′...; A′N, A′B′, etc..., mesurées à la chaîne, et que l'arpenteur a inscrites à son carnet, sur un croquis du terrain reproduisant les perpendiculaires employées. Si la base est choisie hors du polygone, on opère comme il est indiqué n° 192, livre IV.

43. *Mesure d'un terrain terminé par une ligne courbe.* Il ne nous reste donc qu'à nous occuper de la mesure d'un terrain terminé par une ligne courbe ou sinueuse. On peut, à l'aide de perpendiculaires, partager le terrain en plusieurs trapèzes mixtilignes, tels que AagG (*fig.* 23). La question est alors ramenée à évaluer *l'aire d'un trapèze limité par une courbe* AG, *un axe xy et deux ordonnées extrêmes* (*des perpendiculaires à la base*); on peut la résoudre comme il suit.



44. Méthode des trapèzes. On partage l'intervalle ag en un certain nombre n de parties *égales*, et par les points de division on

élève des perpendiculaires bB, cC, dD, etc... Si la distance, δ, comprise entre deux perpendiculaires ou ordonnées consécutives, est assez petite, on peut, sans grande erreur, regarder les arcs AB, BC, etc., comme de petites lignes droites, et les figures $AabB$, $BbcC$, etc., comme des trapèzes rectilignes que l'on sait mesurer. Soient $y_0, y_1, y_2, \ldots$, les longueurs des ordonnées Aa, Bb,..., et S la surface $AagG$, nous avons, à fort peu près,

$$S = \delta\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + \delta\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \delta\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + \ldots \delta\left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right).$$

Cette formule équivaut à celle-ci :

$$S = \delta\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}y_n\right];$$

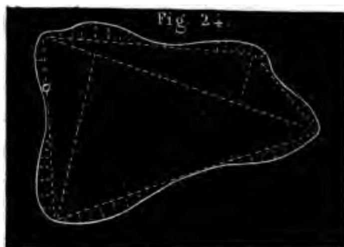
si on appelle Y la somme des ordonnées

$$S = \delta\left[Y - \frac{y_0 + y_n}{2}\right].$$

L'aire d'un trapèze curviligne a pour valeur approchée le produit de la distance comprise entre deux ordonnées consécutives par la somme de toutes les ordonnées diminuée de la demi-somme des ordonnées extrêmes.

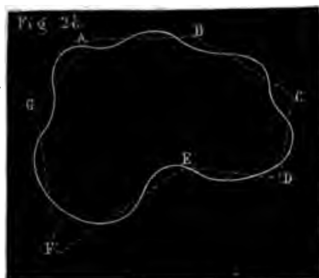
On peut se donner des nombres et appliquer cette formule; ce travail n'offre aucune difficulté.

45. Application. Soit à arpenter un terrain limité par une ligne courbe sinueuse, comme celle que représente la *fig.* 24. On le décompose, comme il est indiqué, en trapèzes ou triangles que l'on mesure d'après les méthodes connues, et en trapèzes mixtilignes que l'on mesure comme il vient d'être indiqué pour la figure $AagG$.



Cette décomposition est celle que l'on préfère quand on veut construire, avec autant d'exactitude que possible, le plan du terrain (n° 24).

46. Mais si on veut seulement calculer avec rapidité la contenance d'une pièce de terre, on peut opérer comme il suit (*fig.* 25).



On plante des jalons en A, B, C,... G, de manière à déterminer un polygone ABCDEFG dont la surface soit égale, à peu de chose près, à celle du terrain considéré; pour cela, on choisit les points A, B,... de manière que les parties retranchées soient compensées par les parties ajoutées. Un peu d'habitude suffit pour établir les jalons de manière à opérer cette compensation. Si on voulait une exactitude presque mathématique, on calculerait (n° 45) les surfaces ajoutées et retranchées, afin de modifier la position des jalons, si les deux sommes comparées différaient trop l'une de l'autre. En tout cas, les positions des jalons fixées, on calcule l'aire du polygone que l'on regarde comme celle du terrain.

47. *Arpenter un terrain dans lequel on ne peut pénétrer ou tirer des lignes.*

Enfin, on doit souvent arpenter certaines superficies, comme un *bois*, une *pépinière*, un *marais*, une récolte sur pied, etc.. dans lesquelles il n'est pas possible de pénétrer, de tirer des lignes, d'élever des perpendiculaires; alors on ne peut plus employer les procédés que nous avons indiqués. Voici comment on y supplée.

Soit ABCDE (*fig.* 26) *un terrain dans lequel on ne peut pénétrer*. On commence par envelopper ce terrain dans un rectangle ou dans un trapèze, comme il est indiqué..., après avoir fait planter des jalons à chaque angle ou point saillant du contour. On détermine la surface de cette figure auxiliaire MNPQ; on en retranche les aires



des parties MA'EE', E'EQD,..... extérieures au terrain que l'on veut mesurer; la différence est évidemment l'aire cherchée. Les figures extérieures à cette aire peuvent être des trapèzes mixtilignes tels que AagG (*fig.* 23).

FIN.

Énoncés de problèmes à résoudre.

Nous croyons bien faire en indiquant, à titre de renseignements, quelques-uns des problèmes qui ont été proposés en composition aux candidats pour le baccalauréat ès sciences.

1. Étant donnée une sphère de cuivre de $0^m,18$ de rayon, creuse, contenant une sphère de platine de $0^m,05$ de rayon de telle sorte qu'il n'y ait aucun vide entre les deux sphères, la densité étant pour le platine 21,53 et pour le cuivre 8,85, calculer le poids de la masse ainsi formée.

2. On a 2 triangles équilatéraux dont les côtés sont : pour le premier $43^m,57$, pour le deuxième $68^m,35$.

On demande de calculer, à un centimètre près, le côté d'un troisième triangle équilatéral dont la surface serait égale à la somme des surfaces des deux premiers.

3. On a une sphère de platine de $0^m,05$ de rayon à 95°. On la plonge dans deux litres d'eau à 4° ; on demande la température de l'eau lorsque l'équilibre s'est rétabli. La capacité calorifique du platine est 0,03351, le coefficient de dilatation linéaire 0,000008565, et sa densité 21,53.

4. Calculer en hectares la surface d'un hexagone régulier dont le côté a une longueur de 235 mètres.

5. On a un parallélipipède dont les trois dimensions sont $10^m,50$, $15^m,75$ et $20^m,45$; il est de glace et plonge dans l'eau de la mer ; la densité de la glace est $0^m,930$; celle de l'eau de la mer 1,026. On demande qu'elle sera la hauteur du parallélipipède au-dessus de la surface de la mer.

6. Un verre à vin de champagne de forme conique a intérieurement $0^m,06$ de diamètre au bord ; il a été rempli complétement de mercure, d'eau et d'huile, dans une proportion telle que la couche formée par chacun de ces liquides a $0^m,05$ d'épaisseur. On sait que la densité du mercure est 13,596 ; celle de l'huile employée 0,915, celle de l'eau étant prise pour unité. Calculer le poids du mercure, de l'eau et de l'huile, en négligeant l'influence de la température sur la densité de ces liquides.

7. Trouver un cylindre de la contenance d'un hectolitre dont la hauteur soit égale au diamètre de la base.

8. Un vase sphérique de rayon intérieur égal à $\frac{2}{3}$ de mètre, à 0° est formée d'une matière dont le coefficient de dilatation linéaire égale $\frac{1}{1200}$. On demande combien de kilogrammes de mercure ce vase renferme à 0° et à 25°.

9. Étant donné un arc de cercle de 60°, calculer la corde, la surface du segment et celle du secteur, le rayon étant 2m,35.

10. Étant donné un arc de 82° 20′, trouver la surface du triangle formée par la corde qui sous-entend cet arc, et les deux cordes qui joignent les extrémités de la première corde au milieu de l'arc.

11. On fabrique avec de l'or, dont la densité est 19,362, des feuilles qui ont dix millièmes de millimètre. Quelle surface pourrait-on couvrir avec 5 grammes d'or ?

12. Un ballon pèse 254gr.,735 lorsqu'il est vide, et 5122gr.,788 lorsqu'il est plein d'air à la température de 4°. On sait que le poids de l'air est à celui de l'eau comme 129 est à 100000. On demande la capacité du ballon.

Le même ballon, plein d'un autre gaz à 4° pèse 651gr.,175, la pression atmosphérique étant 0,76 ; quel en serait le poids si la pression était 1,23.

13. On plonge dans un bain de 20 litres d'eau à 80° centig. une sphère en glace de 140 millimètres de rayon. Calculer la température du bain après la fusion de la glace, la chaleur latente étant 79,25.

14. Étant donné un cercle de rayon égal à 2 mètres, et un point A extérieur à ce cercle et distant de 3 mètres de la circonférence, trouver la longueur de la partie extérieure d'une sécante menée du point A au cercle et dont la partie intérieure égale 1 mètre.

15. Un ballon sphérique de 0,14 de rayon est rempli de mercure à la température de 70° ; on verse ce mercure dans de l'eau à 4°, qui remplit à moitié un vase cylindrique de 0m,40 de hauteur et de 0m,20 de diamètre. On sait que la densité du mercure est 13,59, son coefficient de dilatation 0,00018024 et sa capacité pour la chaleur 0,0330. On demande quelle sera la température du mélange en supposant nulle la température des parois du vase.

16. Le poids de l'air atmosphérique étant $\frac{1}{770}$ du poids de l'eau, déterminer le poids de l'air contenu dans un cylindre dont la circonférence de la base est 0,3, et la hauteur 0,8.

17. Décrire sur une droite un segment capable d'un angle donné. Quelle est la valeur de l'angle pour lequel le rayon du segment est le plus petit possible ?

18. Une machine soufflante lance 14 kilog. d'air par minute ; cette machine se compose d'un cylindre dont le diamètre inférieur est 0m,75, la course du piston est de 0m,50, de telle sorte que chaque coup de piston lance un volume d'air égal à celui d'un cylindre de 0m,50 de hauteur et de 0m,75 de diamètre. Combien dure chaque coup de piston ; on sait que le mètre cube d'air pèse 1298 grammes.

Paris.—Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26, près de l'Odéon.





